Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi
Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**
Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude” , ediţia a XII-a
Galaţi, 05 noiembrie 2011

Clasa a XI-a

SOLUŢII

Problema 1.

Fie şirurile de numere reale:
$(x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1}, (z_n)_{n\geq 1}$ definite astfel:
$x_1 = 3, y_1 = 5, z_1 = \frac{4}{7}$
$x_{n+1} = \frac{2x_n}{x_n^2 - 1}, y_{n+1} = \frac{2y_n}{y_n^2 - 1}, z_{n+1} = \frac{2z_n}{z_n^2 - 1}$ pentru orice n natural, nenul, $n \geq 1$.
a) Justificaţi că şirurile de mai sus sunt corect construite.
b) Studiaţi convergenţa şi limita şirului $(t_n)_{n\geq 1}$, *unde* $t_n = \frac{1}{n} \cdot x_n \cdot \cos(2^{n-1} \cdot arctg 3), n \in \mathbb{N}^*$.
c) Există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât: $x_n + y_n + z_n = 0$?

Constantin Ursu, profesor, Galaţi

a) Observând că x_1, y_1, z_1 sunt numere raţionale, prin inducţie se arată că x_n, y_n, z_n sunt numere raţionale (dacă există). Presupunem că există $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 1$ astfel încât $x_n^2 = 1$, deci $x_n = 1$ sau $x_n = -1$ atunci $x_n = \frac{2x_{n-1}}{x_{n-1}^2 - 1} = \pm 1$, implică x_{n-1} satisface o ecuaţie de forma $t^2 \pm 2t - 1 = 0$ $(x_{n-1} = t)$ care are $\Delta = 8 = (2\sqrt{2})^2$, $t \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, contradicţie. În concluzie, $(x_n)_{n\geq 1}$ este corect construit. La fel se arată că $(y_n)_{n\geq 1}, (z_n)_{n\geq 1}$ sunt şiruri corect construite.

b) $x_1 = 3$ ne arată că există $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\mathrm{tg}\alpha = 3$, de unde
$x_2 = \frac{2x_1}{x_1^2 - 1} = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}^2\alpha - 1} = -tg(2\alpha)$ şi $x_3 = \frac{2x_2}{x_2^2 - 1} = \frac{-\mathrm{tg}2\alpha}{\mathrm{tg}^2 2\alpha - 1}$. Rezultă că $x_3 = \mathrm{tg}2^2 \cdot \alpha$. Prin inducţie $x_n = (-1)^{n-1} \cdot \mathrm{tg}(2^{n-1}\alpha)$. Calculând t_n se obţine
$t_n = \frac{1}{n} \cdot (-1)^{n-1} \cdot \mathrm{tg}(2^{n-1} \cdot \alpha) \cdot \cos(2^{n-1} \cdot \alpha) \Leftrightarrow t_n = \frac{(-1)^n}{n} \cdot \sin(2^{n-1} \cdot \mathrm{arctg}3)$. Din
$|t_n| \leq \frac{1}{n}$ rezultă că şirul $(t_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi are limita 0.

c) Vom folosi cunoscuta propoziţie: $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\gamma = \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta \cdot \mathrm{tg}\gamma \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$ (în condiţiile de existenţă ale valorilor $\mathrm{tg}\alpha, \mathrm{tg}\beta, \mathrm{tg}\gamma$.

În cazul problemei, $x_1 + y_1 + z_1 = \frac{60}{7}$ şi $x_1 \cdot y_1 \cdot z_1 = \frac{60}{7}$. Există

$\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\text{tg}\alpha = 3, \text{tg}\beta = 5$ şi $\text{tg}\gamma = \frac{4}{7}$. Deci avem

$\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta + \text{tg}\gamma = \text{tg}\alpha \cdot \text{tg}\beta \cdot \text{tg}\gamma \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$, de unde $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 2k\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2 + y_2 + z_2 = -\text{tg}2\alpha - \text{tg}2\beta - \text{tg}2\gamma = (-\text{tg}2\alpha)(-\text{tg}2\beta)(-\text{tg}2\gamma) = x_2 \cdot y_2 \cdot z_2$.

Prin inducţie se arată că $x_{n+1} + y_{n+1} + z_{n+1} = x_{n+1} \cdot y_{n+1} \cdot z_{n+1}\ \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}^*$. Dacă presupunem că $\exists\, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x_n + y_n + z_n = 0 \Rightarrow x_n \cdot y_n \cdot z_n = 0$. Deci există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x_n = 0$ sau $\text{y}_n = 0$ sau $\text{z}_n = 0$, care este o contradicţie. În concluzie, nu există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x_n + y_n + z_n = 0$.

Problema 2.

Se considera S_n mulţimea permutărilor definite pe $\{1, 2, 3, ..., n\}, n \in \mathbb{N}^*, n > 1$.

Se notează cu t_n numărul permutărilor $\sigma \in S_n$ ce au exact două inversiuni şi cu p_n numărul permutărilor $\sigma' \in S_n$ pentru care există un singur număr $i \in \{1, 2, 3, ..., n-1\}$ astfel încât $\sigma'(i) > \sigma'(i+1)$.

Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia $p_n = 2 + t_n$.

Constantin Ursu, profesor, Galaţi

Dacă p_n este numărul permutărilor $\sigma' \in S_n,\ n > 1$ astfel încât există un singur $i \in \{1, 2, 3, ..., n-1\}$ cu proprietatea că $\sigma'(i) > \sigma'(i+1)$ atunci $p_2 = 1, \sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (unica permutare) . Dacă *n>2,* numărul permutărilor σ' cu $\sigma'(n) = n$ este egal cu p_{n-1}. Căutăm permutările $\sigma' \in S_n$ astfel încât $\sigma'(i) = n;\ i \in \{1, 2, 3, ..., n-1\}$ cu i fixat şi i să fie unicul cu această proprietate atunci σ' are forma: $\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & i-1 & i & i+1 & ... & n \\ & & & & & \downarrow & & & \\ ... & ... & ... & ... & ... & n & ... & ... & ... \end{pmatrix}$. În mod necesar $\sigma'(1) < \sigma'(2) < ... < \sigma'(i-1)$. Deci trebuie să alegem i-1 elemente din mulţimea {1,2,3,...,n-1} şi să le aşezăm pe poziţiile *1,2,3,...i-1*, ce se poate realiza în C_{n-1}^{i-1} moduri. Pentru $\sigma'(i+1),\ \sigma'(i+2), ...,\ \sigma'(n)$ se scriu elementele rămase în ordine crescătoare. Deci obţinem relaţia de recurenţă: $p_n = p_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^{i-1} \Leftrightarrow p_n = p_{n-1} + 2^{n-1} - 1,\ p_2 = 1$. Se sumează şi se obţine $p_n = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-1} - n \Rightarrow p_n = 2^n - n - 1,\ n \geq 2.$ $\sigma \in S_n$ are exact două inversiuni dacă este una din următoarele variante:

$$\left.\begin{array}{l} a)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & i & i+1 & i+2 & ... & n \\ & & & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & ... & i+1 & i+2 & i & ... & n \end{pmatrix} \\ b)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & i & i+1 & i+2 & ... & n \\ & & & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & ... & i+2 & i & i+1 & ... & n \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{cu } i \in \{1, 2, 3, ..., n-2\}$$

$$c)\left.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & i & i+1 & j & j+1 & \dots & n \\ & & & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & \dots & i+1 & i & j+1 & j & \dots & n \end{pmatrix}\right\}$$ unde $i+1<j$ şi $i\in\{1,2,...,j-2\}$.

Numărul de variante de tipul a) este *n-2*, la fel de tipul b), dar de tipul c) numărul de variante este $S=\sum_{j=3}^{n-1}(j-2)$ deoarece $i\in\{1,2,3,...j-2\}$ atunci $S=1+2+3+...+(n-3)=\frac{(n-2)(n-3)}{2}$. Deci $t_n=\frac{(n-2)(n-3)}{2}+2(n-2)=\frac{(n-2)(n+1)}{2}$. Avem de rezolvat ecuaţia:

$2^n-n-1=\frac{(n+1)(n-2)}{2}+2 \Leftrightarrow 2^{n+1}=n^2+n+4$. Se verifică *n=3* soluţie şi prin inducţie de arată că pentru $n\geq 4 \leftrightarrow 2^{n+1}>n^2+n+4$. Deci singura soluţie *n=3*.

Problema 3

Fie punctul D situat în interiorul triunghiului $\triangle ABC$ astfel încât : $m(\sphericalangle ADB)=m(\sphericalangle ACB)+90^0$ şi $AC\cdot BD=AD\cdot BC$. Calculaţi valoarea raportului $\frac{AB\cdot CD}{AC\cdot BD}$.

Problemă selectată de Constantin Ursu, profesor, Galaţi

Considerăm a,b,c,d şi 0 afixele punctelor A, B, C, D, $\alpha=m(\sphericalangle CAD)$, $s=\frac{AC}{AD}$. Din relaţia $AC=s\cdot AD$ se obţine $a-c=a\cdot s(\cos\alpha+i\sin\alpha)=a\cdot s\cdot e^{i\alpha}$ (1). La fel se obţine $c-b=s\cdot b\cdot i(\cos\alpha+i\sin\alpha)=s\cdot b\cdot i\cdot e^{i\alpha}$ (2). Din (1) şi (2) rezultă $a-b=a\cdot s\cdot e^{i\alpha}+s\cdot b\cdot i\cdot e^{i\alpha}=s\cdot e^{i\alpha}(a+bi)$. Calculând $ac=b\cdot a(1+i\cdot s\cdot e^{i\alpha})$; $bc=b\cdot a(1-s\cdot e^{i\alpha})$ se deduce că:

$(a-b)c=s\cdot e^{i\alpha}(a+bi)c=s(a\cdot c\cdot e^{i\alpha}+b\cdot c\cdot i\cdot e^{i\alpha})=s\cdot a\cdot b[e^{i\alpha}(1+s\cdot i\cdot e^{i\alpha})+i\cdot e^{i\alpha}(1-s\cdot e^{i\alpha})]=$
$=s\cdot a\cdot b\cdot e^{i\alpha}(1+i)$. Trecând la module obţinem: $|a-b|\cdot|c|=AB\cdot CD=s\cdot|a|\cdot|b|\sqrt{2}=AC\cdot BD\sqrt{2}$. De unde rezultă că: $\frac{AB\cdot CD}{AC\cdot BD}=\sqrt{2}$, adică valoarea raportului cerut este $\sqrt{2}$.