Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România — **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri"**

Filiala Galaţi — **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude" , ediţia a XII-a
Galaţi, 05 noiembrie 2011

Clasa a XII-a

SOLUŢII

Problema 1.

Soluţie.a) $f'(x)=\dfrac{1}{1-x^2}>0\Rightarrow f$ strict crescătoare , deci injectivă .

f continuă pe intervalul $(-1,1)$ rezultă că $f(-1,1)$ este interval .

Pentru ca $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=-\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$ rezultă că $f(-1,1)=\mathbb{R}$,deci surjectivă.

b) Considerăm funcţia $g(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}-arcctgx$, $x\in(-1,1)$.Funcţia este derivabilă şi

$g'(x)=\dfrac{2}{1-x^4}>0\Rightarrow$ g strict crescătoare. Pentru că g este continuă pe intervalul $(-1,1)$ şi $\lim\limits_{x\to-1}g(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1}g(x)=+\infty$ există $a\in(-1,1)$ cu proprietatea $g(a)=0$,iar g strict crescătoare arată că soluţia este unică.

c) Inversa funcţiei f este $f^{-1}:\mathbb{R}\to(-1,1)$, $f^{-1}(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

Se arată că are loc egalitatea $f^{-1}(x)\cdot f^{-1}(2\cdot x)\cdot f^{-1}(3\cdot x)=f^{-1}(x)+f^{-1}(2\cdot x)-f^{-1}(3\cdot x)$

Atunci $\int f^{-1}(x)\cdot f^{-1}(2\cdot x)\cdot f^{-1}(3\cdot x)dx=\int f^{-1}(x)dx+\int f^{-1}(2\cdot x)dx-\int f^{-1}(3x)dx=$

$$=\int\frac{\left(e^x+e^{-x}\right)'}{e^x+e^{-x}}dx+\frac{1}{2}\int\frac{\left(e^{2\cdot x}+e^{-2\cdot x}\right)'}{e^{2\cdot x}+e^{-2\cdot x}}dx-\frac{1}{3}\int\frac{\left(e^{3\cdot x}+e^{-3\cdot x}\right)'}{e^{3\cdot x}+e^{-3\cdot x}}dx=$$

$$=\ln\left(e^x+e^{-x}\right)+\frac{1}{2}\cdot\ln\left(e^{2\cdot x}+e^{-2\cdot x}\right)-\frac{1}{3}\ln\left(e^{3\cdot x}+e^{-3\cdot x}\right)+C$$

Problema 2.

Soluţie. a) Scriem $x^{n-1}\cdot y=x^n\cdot\left(x^{-1}\cdot y\right)$. Pentru că f este funcţie surjectivă şi $x^{-1}\cdot y\in G$ rezultă că există $a\in G$ astfel încât $f(a)=x^{-1}\cdot y$ .Reluând ,

$$x^{n-1}\cdot y=x^n\cdot\left(x^{-1}\cdot y\right)=x^n\cdot a^n=(x\cdot a)^n=x\cdot(a\cdot x)^{n-1}\cdot a=x\cdot(a\cdot x)^n\cdot(a\cdot x)^{-1}\cdot a=x\cdot(a\cdot x)^n\cdot x^{-1}$$

Pentru că feste automorfism $(a\cdot x)^n=a^n\cdot x^n$ obţinem

$$x^{n-1}\cdot y=x\cdot a^n\cdot x^n\cdot x^{-1}=x\cdot\left(x^{-1}\cdot y\right)\cdot x^{n-1}=y\cdot x^{n-1}$$

b) Fie funcţia $f:G\to G$, $f(x)=x^n$ .Conform ipotezei este endomorfism . Să arătăm că f este funcţie injectivă . Dacă $f(x)=f(y)\Rightarrow x^n=y^n$. Pentru că m şi n sunt prime între ele rezultă că există

$u, v \in \mathbb{Z}$ astfel încât $m \cdot u + n \cdot v = 1$. Urmează că

$$x = x^{m \cdot u + n \cdot v} = \left(x^m\right)^u \cdot \left(x^n\right)^v = e \cdot \left(y^n\right)^v = y^{n \cdot v} = y^{1 - m \cdot u} = y \cdot \left(y^m\right)^{-u} = y \ .$$

Cum G este mulțime finită şi f este injectivă rezultă ca f este surjectivă .Pentru că f este automorfism , conform punctului **a)** are loc relația $x^{n-1} \cdot y = y \cdot x^{n-1}$. Vom folosi rezultatul pentru a arăta că funcția $g : G \to G$, $g(x) = x^{n-1}$ este automorfism .

$g(x \cdot y) = (x \cdot y)^{n-1} = (x \cdot y)^n \cdot (x \cdot y)^{-1} = (x \cdot y)^n \cdot y^{-1} \cdot x^{-1} = x^n \cdot y^n \cdot y^{-1} \cdot x^{-1} = x^n \cdot y^{n-1} \cdot x^{-1}$. Dar $y^{n-1} \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot y^{n-1}$ şi obținem $g(x \cdot y) = x^{n-1} \cdot y^{n-1}$ **,** deci g este endomorfism .

Analog , pentru că m şi n-1 sunt prime între ele ,se arată că g este injectivă şi pentru că G este finită rezultă că g este surjectivă.Pentru că g este automorfism , conform punctului **a)** rezultă că $x^{n-2} \cdot y = y \cdot x^{n-2}$,$\forall x, y \in G$.În sfârşit , să arătam ca G este abelian .

$$x \cdot y = x^{n-1-(n-2)} \cdot y = x^{n-1} \cdot \left(x^{-1}\right)^{n-2} \cdot y = x^{n-1} \cdot y \cdot \left(x^{-1}\right)^{n-2} = y \cdot x^{n-1} \cdot \left(x^{-1}\right)^{n-2} = y \cdot x$$

Problema 3

Soluție. Pentru $x = 0$ obținem $f(0) = 0$.

Dacă x trece în $\frac{x}{2}$ relația funcțională devine

$$f(x) = f(x + arctg x) + f(x - arctg x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Pentru că $1_{\mathbb{R}}$ este o soluție a ecuației definim $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & , \quad x \neq 0 \\ f'(0) & , \quad x = 0 \end{cases}$

Din definiție rezultă că g este funcție continuă în 0 .

Pentru $x \neq 0$ funcția g verifică relația :

$$g(x) = \frac{\frac{x}{2} + arctg\frac{x}{2}}{x} \cdot g\left(\frac{x}{2} + arctg\frac{x}{2}\right) + \frac{\frac{x}{2} - arctg\frac{x}{2}}{x} \cdot g\left(\frac{x}{2} - arctg\frac{x}{2}\right)$$

Notăm $\alpha(x) = \dfrac{\frac{x}{2} + arctg\frac{x}{2}}{x}$, $\beta(x) = \dfrac{\frac{x}{2} - arctg\frac{x}{2}}{x}$, $u(x) = \frac{x}{2} + arctg\frac{x}{2}$, $v(x) = \frac{x}{2} - arctg\frac{x}{2}$ şi determinăm funcția g din ecuația $g(x) = \alpha(x) \cdot g(v(x)) + \beta(x) \cdot g(u(x))$.

Pentru că $\left|arctg\frac{x}{2}\right| \leq \left|\frac{x}{2}\right|$ rezultă că $\alpha(x) > 0$, $\beta(x) > 0$, iar $\alpha(x) + \beta(x) = 1$.

Aceste relații arată că funția g este o medie între $g(v(x))\ si\ g(u(x))$, aşadar se află între ele .

Definim şirurile $(x_n)_{n \geq 0}$ şi $(y_n)_{n \geq 0}$ prin condițiile:

$$x_0 = x\ ,\ x_{n+1} = \begin{cases} u(x_n) & , \quad daca\ g(u(x_n)) \geq g(x_n) \\ v(x_n) & , \quad daca\ g(v(x_n)) > g(x_n) \end{cases}$$

$$y_0 = x\ ,\ y_{n+1} = \begin{cases} u(y_n) & , \quad daca\ g(u(y_n)) < g(y_n) \\ v(y_n) & , \quad daca\ g(v(y_n)) \leq g(y_n) \end{cases}$$

Funcțiile u şi v sunt strict crescătoare .Prin inducție se arată ca sirurile$\left(x_n\right)_{n\geq 0}$, $\left(y_n\right)_{n\geq 0}$ sunt monotone şi mărginite , ambele convergente la 0 .
Din definiția şirurilor rezultă că $g\left(x_{n+1}\right)\geq g\left(x_n\right), \forall n\in\mathbb{N}$ şi $g\left(y_{n+1}\right)\leq g\left(y_n\right), \forall n\in\mathbb{N}$.
Din şirul de inegalități
$g\left(y_n\right)\leq g\left(y_{n-1}\right)\leq\ldots\leq g\left(y_0\right)=g\left(x\right)=g\left(x_0\right)\leq g\left(x_1\right)\leq\ldots\leq g\left(x_{n-1}\right)\leq g\left(x_n\right)$, prin trecere la limita cu $n\to\infty$ obținem $g\left(x\right)=g\left(0\right)$. Urmează că $f\left(x\right)=x\cdot f^{'}\left(0\right)=a\cdot x$, $a\in\mathbb{R}$