Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi
Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**
Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude” , ediţia a XII-a
Galaţi, 05 noiembrie 2011

Clasa a VIII-a

SOLUŢII

Problema 1.

Soluţie. a) Din $\frac{a+c}{b}=\sqrt{3}$ obţinem $b=\frac{a+c}{\sqrt{3}}$ şi înlocuind în relaţia $\frac{b+c}{a}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ obţinem relaţia

$\frac{\frac{a+c}{\sqrt{3}}+c}{a}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}\Leftrightarrow\frac{a+c+c\cdot\sqrt{3}}{a\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}\Leftrightarrow 2\cdot\left(a+c+c\cdot\sqrt{3}\right)=\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot a\cdot\sqrt{3}\Leftrightarrow a=2\cdot c$. Din relaţiile $a=2\cdot c$ şi $\frac{a+c}{b}=\sqrt{3}$, obţinem $b=c\cdot\sqrt{3}$. Apoi, din relaţiile $a=2\cdot c$ şi $b=c\cdot\sqrt{3}$ obţinem că $\frac{a+b}{c}=\frac{2\cdot c+c\cdot\sqrt{3}}{c}=2+\sqrt{3}$.

b) Din $a=2\cdot c$ şi $b=c\cdot\sqrt{3}$ deducem că a, b şi c verifică relaţia din teorema lui Pitagora, deoarece $(2\cdot c)^2=\left(c\cdot\sqrt{3}\right)^2+c^2\Leftrightarrow 4\cdot c^2=3\cdot c^2+c^2$. Aşadar, a, b şi c pot fi lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic, cu ipotenuza de lungime a.

Altfel, avem că $c<b=c\cdot\sqrt{3}<a=2\cdot c$ şi $c+b=c+c\cdot\sqrt{3}=c\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)>2\cdot c=a$, deci $b+c>a$. Folosind inegalitatea $a>b>c$ se deduce uşor că $a+c>b$ şi $a+b>c$. Prin urmare, a, b, c pot fi lungimile laturilor unui triunghi.

b) În triunghiul ΔABC avem că $BC=a=2\cdot c,\ AC=b=c\cdot\sqrt{3}$ şi $AB=c$, deci $BC^2=AB^2+AC^2$, adică triunghiul ΔABC este dreptunghic în A şi $\sin B=\frac{AC}{BC}=\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin C=\frac{AB}{BC}=\frac{c}{a}=\frac{c}{2\cdot c}=\frac{1}{2}$, adică $m(\sphericalangle B)=60^\circ$ şi $m(\sphericalangle C)=30^\circ$.

Problema 2.
Soluţie.

a) Soluţie. Înmulţind ecuaţia cu 4, avem $4\cdot x^2-4\cdot x+4\cdot y^2-4\cdot y-8=0\Leftrightarrow(2\cdot x-1)^2+(2\cdot y-1)^2=10$.

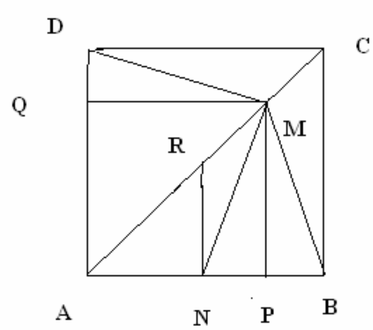
Deoarece $2\cdot x-1,\ 2\cdot y-1\in 2\cdot\mathbb{Z}+1$, avem următoarele situaţii $\begin{cases}2\cdot x-1=1\\2\cdot y-1=3\end{cases}$ sau $\begin{cases}2\cdot x-1=-1\\2\cdot y-1=-3\end{cases}$ sau $\begin{cases}2\cdot x-1=3\\2\cdot y-1=1\end{cases}$ sau $\begin{cases}2\cdot x-1=-3\\2\cdot y-1=-1\end{cases}$ sau $\begin{cases}2\cdot x-1=-3\\2\cdot y-1=+1\end{cases}$ sau $\begin{cases}2\cdot x-1=+3\\2\cdot y-1=-1\end{cases}$ sau $\begin{cases}2\cdot x-1=-1\\2\cdot y-1=+3\end{cases}$ sau $\begin{cases}2\cdot x-1=+1\\2\cdot y-1=-3\end{cases}$.

În final, $(x;y)\in\{(1;2),(0;-1),(2;1),(-1;0),(-1;1),(2;0),(0;2),(1;-1)\}$.

b) Avem că $x=n^2-2\cdot\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\cdot n+2\cdot\sqrt{3}=\left[n-\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\right]^2+2\cdot\sqrt{21}-10+2\cdot\sqrt{3}$, de unde obţinem că x este minim dacă valoarea absolută a numărului real $n-\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)$, $n\in\mathbb{Z}$ este minimă, adică pentru $n=1$. Deci, cel mai mic element al mulţimii A este $1+4\cdot\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{7}$.

Problema 3

a) Ducem $MP\perp AB$, $P\in[AB]$ şi $MQ\perp AD$, $Q\in[AD]$. Avem că $APMQ$ este pătrat, iar din $[MQ]\equiv[MP]$ şi $\sphericalangle DMQ\equiv\sphericalangle MPN$ obţinem că $\Delta MQD\equiv\Delta MPN$. Deci, $[MD]\equiv[MN]$, iar din faptul că AC este mediatoare pentru $[BD]$ şi $M\in[AC]$, avem că $[MD]\equiv[MB]$. Prin urmare, $[MN]\equiv[MB]$, deci ΔMNB este isoscel şi cum $MP\perp NB$, deducem că $[NP]\equiv[PB]$. Mai departe, ducem $NR\perp AB$, $R\in(AC)$. Avem că $AR=\sqrt{2}\cdot AN=2\cdot MC$. Deoarece $RN\perp AB, MP\perp AB, BC\perp AB$, rezultă că $RN\parallel MP\parallel BC$ şi aplicând teorema lui Thales avem că $\frac{AR}{RM}=\frac{AN}{PN}$ şi $\frac{RM}{MC}=\frac{NP}{PB}$, de unde deducem, prin înmulţirea celor două relaţii, că $\frac{AR}{MC}=\frac{AN}{PB}$. Dar, având în vedere că $AR=2\cdot MC$, obţinem că $AN=2\cdot PB=NB$. Prin urmare, N este mijlocul lui $[AB]$. Avem că $\Delta AMP\equiv\Delta ACB$, de unde rezultă că $\frac{MP}{BC}=\frac{AP}{AB}=\frac{3\cdot PB}{4\cdot PB}=\frac{3}{4}$. Atunci $A_{\Delta AMN}=\frac{AN\cdot MP}{2}=\frac{a}{2}\cdot\frac{3\cdot a}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3\cdot a^2}{16}$, deci $\frac{A_{\Delta AMN}}{A_{ABCD}}=\frac{3\cdot a^2}{16}\cdot\frac{1}{a^2}=\frac{3}{16}$.



b) Să observăm mai întâi că, indiferent de paritatea lui n, primul jucător care mută poate adopta o strategie prin care să câştige jocul. Dacă n este par, atunci primul jucător va haşura două pătrate situate la mijloc. Faţă de aceste pătrate tabla este simetrică şi orice va marca (haşura) al doilea jucător, primul jucător va marca (haşura) pătratele simetrice. Acest raţionament arată că primul jucător va fi ultimul care va marca (haşura). Dacă n este impar, atunci primul jucător va marca (haşura) pătratul din mijloc, tabla va deveni simetrică faţă de pătratul marcat (haşurat) şi raţionamentul este acelaşi cu cel de la cazul n număr natural par.