Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi
Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri"**
Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

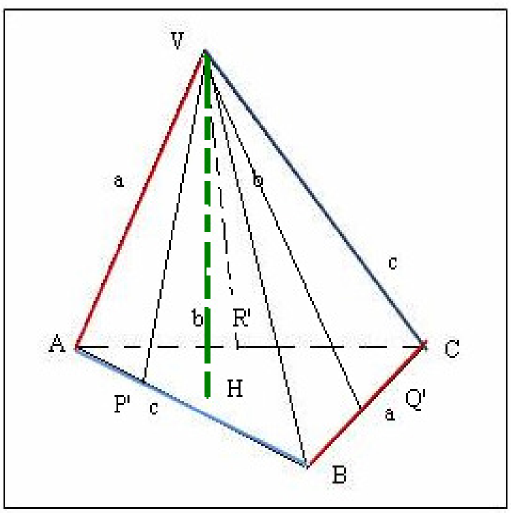
Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude" , ediţia a XII-a
Galaţi, 05 noiembrie 2011

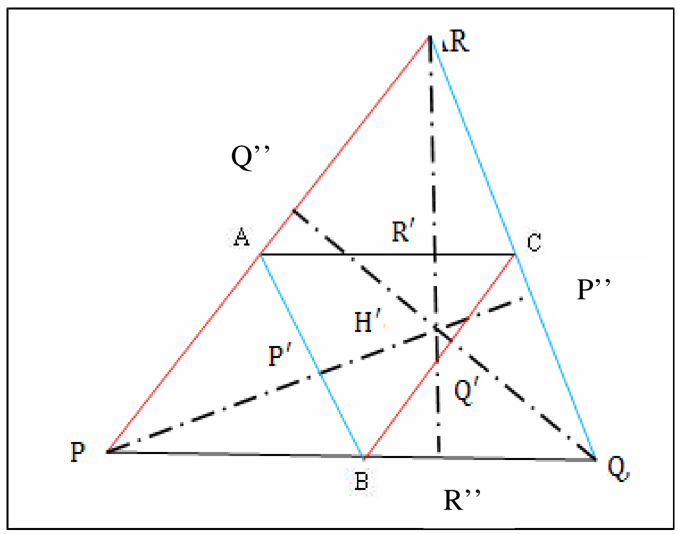
Clasa a IX-a

SOLUŢII

Problema 1.
Soluţie.
a) Toate feţele piramidei sunt triunghiuri congruente: $\Delta VAB \equiv \Delta BCV \equiv \Delta CBA \equiv \Delta AVC\ (1)$ (Nicio altă alegere a triunghiurilor congruente nu ar respecta condiţiile problemei : toate cele 4 feţe ale piramidei să fie triunghiuri respectiv congruente).

Prin urmare, $\sphericalangle AVC \equiv \sphericalangle ABC;\ \sphericalangle AVB \equiv \sphericalangle ACB;\ \sphericalangle BVC \equiv \sphericalangle BAC \rightarrow$
$m(\sphericalangle AVC) + m(\sphericalangle AVB) + m(\sphericalangle BVC) = m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle ACB) + m(\sphericalangle BAC) = 180^\circ$





b) Dacă desfăşurăm feţele laterale conform enunţului, se obţine triunghiul PQR .
Din relaţia (1) → [AP] ≡ [AR] ≡ [BC] , [BQ] ≡ [BP] ≡ [AC] şi [CQ] ≡ [CR] ≡ [AB] →
[AB] , [BC], [AC] sunt liniile mijlocii ale ΔPQR (ΔABC este triunghiul median al ΔPQR)
Prin urmare, AB ∥ RQ , BC ∥ PR, AC ∥ PQ . Fie PP'', QQ'', RR'' înălţimile ΔPQR ,unde $P'' \in [RQ]$, Q''$\in [PR], R'' \in [PQ]$

$$\left.\begin{array}{c} AB \parallel RQ,\ BC \parallel PR, AC \parallel PQ \\ [PP''] \perp RQ, [QQ''] \perp PR, [RR''] \perp PQ, [PP''] \cap [QQ''] \cap [RR''] = \{H'\} \end{array}\right\} \rightarrow PP'' \perp AB, QQ'' \perp BC, RR'' \perp AC$$

Prin urmare,
$$\left.\begin{array}{l} VP' \perp AB, H'P' \perp AB \rightarrow AB \perp (VP'H') \rightarrow AB \perp VH' \\ VQ' \perp BC, H'Q' \perp BC \rightarrow BC \perp (VQ'H') \rightarrow BC \perp VH' \end{array}\right\} \rightarrow VH' \perp (ABC)$$
$$\rightarrow [VH'] \text{este înălțime în piramida } VABC \rightarrow H' = H$$

Problema 2

Soluţie.
Avem:
3n=$\sqrt{9n^2} < \sqrt{9n^2+1} < \sqrt{9n^2+2} < \cdots < \sqrt{9n^2+6n} < \sqrt{9n^2+6n+1} = \sqrt{(3n+1)^2} = 3n+1$,
de unde $[\sqrt{9n^2+1}] = [\sqrt{9n^2+2}] = \cdots = [\sqrt{9n^2+6n}] = 3n$, deci $[\sqrt{9n^2+k}]$=3n, k=$\overline{1,6n}$;

3n+1=$\sqrt{(3n+1)^2}$=$\sqrt{9n^2+6n+1} < \sqrt{9n^2+6n+2} < \sqrt{9n^2+6n+3}$<...<
$\sqrt{9n^2+12n+3} < \sqrt{9n^2+12n+4} = \sqrt{(3n+2)^2} = 3n+2$, de unde $[\sqrt{9n^2+k}]$=3n+1, k=$\overline{6n+1,12n+3}$;

3n+2=$\sqrt{(3n+2)^2}$=$\sqrt{9n^2+12n+4} < \sqrt{9n^2+12n+5} < \sqrt{9n^2+12n+6}$<...<
$\sqrt{9n^2+18n+8} < \sqrt{9n^2+18n+9} = \sqrt{(3n+3)^2} = 3n+3$, de unde $[\sqrt{9n^2+k}]$=3n+2, k=$\overline{12n+4,18n+8}$;

3n+3=$\sqrt{(3n+3)^2}$=$\sqrt{9n^2+18n+9} < \sqrt{9n^2+18n+10} < \sqrt{9n^2+18n+11}$<...<
$\sqrt{9n^2+24n+15} < \sqrt{9n^2+24n+16} = \sqrt{(3n+4)^2} = 3n+4$, de unde $[\sqrt{9n^2+k}]$=3n+3, k=$\overline{18n+9,24n+15}$.
Inecuaţia din enunţ se scrie astfel:

(
$[\sqrt{9n^2+1}] + [\sqrt{9n^2+2}] + \cdots + [\sqrt{9n^2+6n}]) + ([\sqrt{9n^2+6n+1}] + [\sqrt{9n^2+6n+2}] +$
$+[\sqrt{9n^2+6n+3}] +$
...+[$\sqrt{9n^2+12n+3}$]) +($[\sqrt{9n^2+12n+4}] + [\sqrt{9n^2+12n+5}] + +[\sqrt{9n^2+12n+6}]$+...+[
$\sqrt{9n^2+18n+8}$])+($[\sqrt{9n^2+18n+9}] + [\sqrt{9n^2+18n+10}] + +[\sqrt{9n^2+18n+11}]$+...+[
$\sqrt{9n^2+24n+15}$])$\le 144n+43 \leftrightarrow \underbrace{3n+3n+\cdots+3n}_{\text{de 6n ori}} + \underbrace{(3n+1)+(3n+1)+\cdots+(3n+1)}_{\text{de 6n+3 ori}} +$
$\underbrace{(3n+2)+(3n+2)+\cdots+(3n+2)}_{\text{de 6n+5 ori}} + \underbrace{(3n+3)+(3n+3)+\cdots+(3n+3)}_{\text{de 6n+7 ori}} \le 144n+43 \leftrightarrow$
$3n\cdot 6n + (3n+1)(6n+3) + (3n+2)(6n+5) + (3n+3)(6n+7) \le 144n+43 \leftrightarrow$
$72n^2+81n+34 \le 144n+43 \leftrightarrow 72n^2-63n-9 \le 0 \leftrightarrow 8n^2-7n-1 \le 0 \leftrightarrow 8n(n-1)+n-1 \le 0 \leftrightarrow (n-1)(8n+1) \le 0$.
Cum $n \in \mathbb{N}^*$, rezultă $8n+1 \ge 0$ şi atunci inecuaţia obţinută este echivalentă cu $n-1 \le 0$, adică $n \le 1$, deci $n = 1$.

Problema 3

Soluţie.
Se demonstrează propoziţiile:
Propoziţia 1:
$a,b,c \in \mathbb{Z}; a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0 \leftrightarrow a = b = c = 0$
$\Leftarrow$ Dacă a=b=c=0, propoziţia este evidentă.
$\Longrightarrow$ Dacă $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0 \Rightarrow b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = -a \Rightarrow 2b^2 + 3c^2 + 2bc\sqrt{6} = a^2 \Leftrightarrow$
$2b^2 + 3c^2 - a^2 = -2bc\sqrt{6}$.
Deoarece $\sqrt{6} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \Rightarrow b = 0$ sau $c = 0$.
Dacă b=0 $\Rightarrow a + c\sqrt{3} = 0 \Rightarrow a = -c\sqrt{3} \Rightarrow a = c = 0$.
Dacă c=0 $\Rightarrow a + b\sqrt{2} = 0 \Rightarrow a = -b\sqrt{2} \Rightarrow a = b = 0$,deci propozția este demonstrată.

Propoziţia 2:
Fie a,b,c,a’,b’,c’$\in \mathbb{Z}$.

$a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}=a^{'}+b^{'}\sqrt{2}+c^{'}\sqrt{3} \Leftrightarrow a=a', b=b', c=c'$.
Demonstraţie:
$a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}=a^{'}+b^{'}\sqrt{2}+c^{'}\sqrt{3} \Leftrightarrow a-a'+(b-b')\sqrt{2}+(c-c')\sqrt{3}=0$. Conform propoziţiei 1$\Rightarrow$ a=a', b=b', c=c'.

a) Considerăm o mulţime S de 10^{18} numere de forma $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}$ cu a,b,c $\in \{0, 1, 2, \ldots, 10^6-1\}$
Conform Propoziţiei 1 şi Propoziţiei 2, S conţine 10^{18} elemente distincte două câte două. Considerăm $d=\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cdot 10^6$. Se justifică: $(\forall)x\in S \Rightarrow x\in [0,d)$.
Partiţionăm intervalul [0,d) în 10^{18}-1 intervale de forma $[(k-1)l,\ k\cdot l)$, unde $l=\frac{d}{10^{18}-1}$ şi
k$\in \{1, 2, 3, ..., 10^{18}-1\}$.
Vor exista două numere în acelaşi interval şi diferenţa lor $r+s\sqrt{2}+t\sqrt{3}$ satisface
$\left|r+s\sqrt{2}+t\sqrt{3}\right| < l = \frac{d}{10^{18}-1} = \frac{\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cdot 10^6}{10^{18}-1} < \frac{1}{10^{11}}$

b) Considerăm $F_1= a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}$, $F_2= a+b\sqrt{2}-c\sqrt{3}$, $F_3= a-b\sqrt{2}+c\sqrt{3}$, $F_4= a-b\sqrt{2}-c\sqrt{3}$.
$F_1\neq 0$.
Dacă $F_1=0 \leftrightarrow a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3} \leftrightarrow a=b=c=0$, care nu satisface condiţiile din ipoteză.
$F_1\neq 0 \rightarrow F_2\neq 0$, $F_3\neq 0$, $F_4\neq 0$.
Considerăm $p=F_1\cdot F_2\cdot F_3\cdot F_4$.
$p\in \mathbb{Z}$ şi $p\neq 0 \rightarrow |p|\geq 1 \rightarrow |F_1| = \frac{p}{F2\cdot F3\cdot F4} \geq \frac{1}{F2\cdot F3\cdot F4}$.
Deoarece $|F_i| < 10^7 \rightarrow |F_2\cdot F_3\cdot F_4| < 10^{21}$
În concluzie, $|F_1| > 10^{-21}$