SOLUTII CLASA a V-a

Problema 1.

a) Să se determine numerele de două cifre care împărțite la suma cifrelor dau câtul 5 şi restul 2;

b) Determinați ultima cifră a produsului tuturor numerelor impare de trei cifre.

V. Lazăr

Raspuns:

a) numarul este 22

b) 5

Problema 2.

Se consideră numărul $a = 13 + 13^2 + ... + 13^n, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Dacă $n = 1008$ arătați că a este divizibil prin 61;

b) Demonstrați că numărul $A = 12a + 13$ se poate scrie ca suma a patru pătrate perfecte nenule.

D. Dobre

Rezolvare

a) $a = 13(1+13+13^2) + 13^4(1+13+13^2) + ... + 13^{1006}(1+13+13^2) =$

$= 183(13+13^4+...+13^{1006}) = 61 \cdot 3 \cdot (13+13^4+...+13^{1006}) \vdots 61$

b) $A = 12a + 13 = 13 + 12 \cdot 13 + 12 \cdot 13^2 + ... + 12 \cdot 13^n = 13^2 + 12 \cdot 13^2 + ... + 12 \cdot 13^n$

$= 13^{n+1}$

Dacă $n = 2k$ avem $A = 13^{2k+1} = 13^{2k} \cdot 13 = (13^k)^2(1^2+2^2+2^2+2^2) =$

$= (13^k)^2 + (2 \cdot 13^k)^2 + (2 \cdot 13^k)^2 + (2 \cdot 13^k)^2$

Dacă $n = 2k+1$ avem $A = 13^{2k+2} = 13^{2k} \cdot 13^2 = 13^{2k} \cdot (10^2+7^2+4^2+2^2) =$

$= (13^k \cdot 10)^2 + (13^k \cdot 7)^2 + (13^k \cdot 4)^2 + (13^k \cdot 2)^2$

Problema 3.

Moş Crăciun are în sac roboței de trei culori: roşii, verzi şi albaştri. Roboțeii au de la două la cinci mâini şi de la trei la douăzeci de antene. Câți roboței trebuie să fie într-un sac pentru a putea fi siguri că putem alege unsprezece roboței de acelaşi fel?

***

Raspuns:

2161 robotei

Problema 4.

Considerăm tabloul:

(1,1)

(1,2);(2,1)

(1,3);(2,2);(3,1)

(1,4);(2,3);(3,2);(4,1)

…………………………………………….

a) Aflați a 20-a pereche de pe linia 2011;

b) Dacă parcurgem tabloul linie cu linie, care este a 2011-a pereche pe care o găsim?

C.Bărăscu

a. Cum linia 2011 este:

(1,2011); (2,2010); (3,2009).... $\Rightarrow$ a 20-a PERECHE de pe această linie este (20, 2012-20) adică (20,1992)

b. Dacă numărăm perechile pe linii, observăm că ultima pereche pe linia n, are numărul de ORDINE

$1+2+3+4+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ şi cum

$$\frac{62\cdot 63}{2} < 2011 < \frac{63\cdot 64}{2} \Leftrightarrow 1953<2011<2016$$

$\Rightarrow$ PERECHEA CĂUTATĂ se află pe linia 63 cu numărul de ordine $2011-1953=58$

Perechea este (58, 64−58) adică (58,6)