SOLUTII CLASA a VI-a

Problema 1.

Să se determine numerele naturale *a*, *b* astfel încât $a+b=100$ şi $[a,b]=455$, unde $[a,b]$ reprezintă cel mai mic multiplu comun al numerelor *a* şi *b*.

M. Pop

Soluţie. Fie $d=(a,b)$ cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b. Avem $d|(a+b)$ şi $d|[a,b]$, deci $d|(a+b,[a,b])$ sau $d|5$. Astfel că $d=1$ sau $d=5$.

Dacă $d=1$ din relaţia $a\cdot b=(a,b)\cdot[a,b]$ rezultă $a\cdot b=455$, deci sau a sau b se divide cu 5 şi apoi din $a+b=100$ rezultă că şi celălalt se divide cu 5 (contradicţie cu $(a,b)=1$).

Rămâne $d=5$ şi atunci din $a\cdot b=(a,b)\cdot[a,b]$ rezultă $a\cdot b=2275$. Cu notaţia $a=5a_1$ şi $b=5b_1$ obţinem: $a_1+b_1=20=7+13$ şi $a_1\cdot b_1=91=7\cdot 13$, deci $a_1=7$ şi $b_1=13$, $a=35$, $b=65$ sau invers.

Problema 2.

Fie numărul $A=5^{2n+1}-20^{n}-4^{2n+1}, \quad n\in\mathbb{N}$.

a) Stabiliți ultima cifră a numărului *A*.

b) Determinați valorile lui *n* pentru care *A* este un număr prim.

D. Dobre

Rezolvare

a) 1. Dacă $n=0 \Rightarrow A=5-1-4=0 \Rightarrow U(A)=0$

2. Dacă $n\geq 1 \Rightarrow U(a)=5-0-4=1$

b) $A=5^{n}\cdot 5^{n+1}+4\cdot 20^{n}-5\cdot 20^{n}-4^{n}\cdot 4^{n+1}=$

$=5^{n}\cdot(5^{n+1}+4^{n+1})-4^{n}\cdot(5^{n+1}+4^{n+1})=$

$=(5^{n+1}+4^{n+1})(5^{n}-4^{n})$

A este prim $\Rightarrow 5^{n}-4^{n}=1 \Rightarrow \underline{\underline{n=1}}$

Pt $n=1 \Rightarrow 5^{n+1}+4^{n+1}=5^{2}+4^{2}=25+16=41$ – nr prim.

Problema 3.

Numerele 1, 2, 3,….,20 se scriu pe un rând într-o ordine arbitrară. Să se arate că:
a) Există trei termeni consecutivi cu suma mai mare decât 29;
b) Există trei termeni consecutivi cu suma mai mică decât 34.

V. Pop

Soluţie. Vom considera cele 18 secvenţe de câte trei termeni consecutivi

$$S_1 = \{x_1, x_2, x_3\},\ S_2 = \{x_2, x_3, x_4\}, \ldots, S_{18} = \{x_{18}, x_{19}, x_{20}\}$$

cu sumele

$$x_1 + x_2 + x_3 = S_1,\ x_2 + x_3 + x_4 = S_2, \ldots, x_{18} + x_{19} + x_{20} = S_{18}$$

şi avem:

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_{18} = (x_1 + x_{20}) + 2(x_2 + x_{19}) + 3(x_3 + x_4 + \ldots + x_{18})$$

$$= 3(x_1 + x_2 + \ldots + x_{20}) - 2(x_1 + x_{20}) - (x_2 + x_{19})$$

$$= 3(1 + 2 + \ldots + 20) - 2(x_1 + x_{20}) - (x_2 + x_{19})$$

$$= 630 - 2(x_1 + x_{20}) - (x_2 + x_{19}).$$

Deoarece

$$2(x_1 + x_{20}) + (x_2 + x_{19}) \leq 2(19 + 20) + 18 + 17 = 113$$

şi

$$2(x_1 + x_{20}) + (x_2 + x_{19}) \geq 2(1 + 2) + (3 + 4) = 13$$

obţinem $517 \leq S_1 + S_2 + \ldots + S_{18} \leq 617$.

Deoarece $\frac{517}{18} > 28$ şi $\frac{617}{18} < 35$ rezultă că există cel puţin un $S_0 \geq 29$ şi cel puţin un $S_j \leq 34$.

Problema 4.

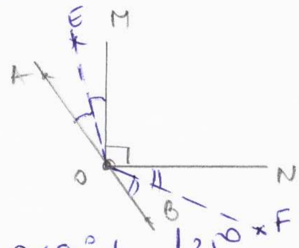
Fie $\sphericalangle MON$ un unghi cu măsura de 90^0 şi A, O, B puncte coliniare astfel încât $O \in (AB)$. Dacă $(OE$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOM$ şi $(OF$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BON$ arătaşi că $m\left(\widehat{EOF}\right) \in \{45^0; 135^0\}$

G.M. nr. 1/2010

Rezolvare (GM nr 1/2010)

Notăm $m(\widehat{AOM}) = 2a$ și $m(\widehat{BON}) = 2b$.

Cazul 1). $M \in$ int $\widehat{AON}$



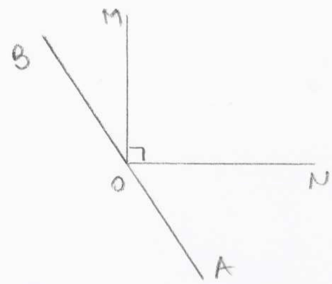
$m(\widehat{EOF}) = m(\widehat{EOM}) + m(\widehat{MON}) + m(\widehat{NOF}) = a + 90^\circ + b = 135^\circ$

Cazul 2) $N \in$ int $\widehat{AOM}$

$m(\widehat{EOF}) = m(\widehat{AOB}) - [m(\widehat{AOE}) + m(\widehat{BOF})] = 180^\circ - (a+b)$

$m(\widehat{AOM}) + m(\widehat{BON}) = m(\widehat{AON}) + m(\widehat{NOM}) + m(\widehat{NOM}) + m(\widehat{MOB}) =$

$= m(\widehat{AOB}) + 90^\circ = 270^\circ \Rightarrow$

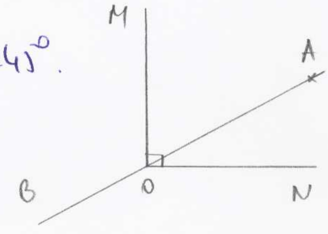


$2a + 2b = 270^\circ \Rightarrow a + b = 135^\circ$.

Deci $m(\widehat{EOF}) = 45^\circ$

Cazul 3) $A \in$ int $\widehat{MON}$

$m(\widehat{EOF}) = m(\widehat{MON}) + m(\widehat{NOF}) - m(\widehat{MOE}) = 90^\circ + b - a$.



$m(\widehat{AON}) = 90^\circ - 2a = 180^\circ - 2b \Rightarrow b - a = 45^\circ$.

Deci $m(\widehat{EOF}) = 135^\circ$

Cazul 4) $B \in$ int $\widehat{MON}$ se tratează analog.