Solutii CLASA a VII-a

Problema 1.

Dacă $\left(\overline{ab2};\overline{bc7};\overline{ca9}\right)=3$ demonstrați că $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ este un număr irațional.

N. Stănică

Solutie:

Avem: 100a+10b+2 $\vdots$ 3 $\Rightarrow$ a+b = 3t + 1 (1)
100b+10c+7 $\vdots$ 3 $\Rightarrow$ b+c = 3k + 2 (2)
100c+10a+8 $\vdots$ 3 $\Rightarrow$ a+c = 3n + 1 (3)

Din relatiile (1) , (2) si (3) obtinem forma numerelor a, b, c:

$$a=M_3;\ b=M_3+1;\ c=M_3+1\Rightarrow a^2+b^2+c^2=M_3+2$$

si cum M_3+2 nu este patrat perfect obtinem concluzia problemei.

Problema 2.

a) Să se arate că pentru orice număr întreg *x*, numărul $x^3\left(x^3-1\right)\left(x^3+1\right)$ este divizibil cu 9;

b) Să se arate că pentru orice numere întregi x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 avem $x_1^6+x_2^6+x_3^6+x_4^6+x_5^6\neq 20112011$

M. Pop

Soluţie. a) Resturile modulo 9 ale cuburilor sunt numai 0, 1 şi −1 deci sau x^3 sau x^3+1 sau x^3-1 se divide cu 9.

b) Pentru orice $x\in\mathbb{Z}$ restul modulo 9 al lui x^6 este 0 sau 1, deci

$$x_1^6+x_2^6+\ldots+x_n^6\leq n\leq 7 \pmod 9,$$

iar 20112011 este egal cu $2+1+1+2+1+1=8 \pmod 9$. Astfel că egalitatea nu poate avea loc.

Problema 3.

Fie M un punct în interiorul triunghiului ABC astfel încât $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle ACM$. Dacă P şi Q sunt proiecțiile lui M pe AB, respectiv AC şi E este mijlocul lui $[BC]$, arătați că $[EP] \equiv [EQ]$.

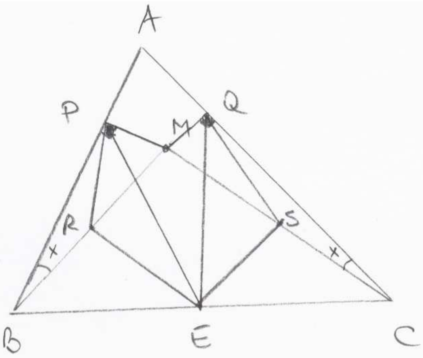
G.M. nr. 10/2011

Solutie:

Fie R mijlocul lui $[MB]$

S mijlocul lui $[MC]$

Fie $m(\widehat{PBR}) = m(\widehat{QCS}) = x$



În ΔPMB cu $m(\hat{P}) = 90^\circ$ $\quad PR = \frac{MB}{2}$ (1)

În ΔQMC cu $m(\hat{Q}) = 90^\circ$ $\quad QS = \frac{MC}{2}$ (2)

În ΔCMB, $[SE]$ linie mijlocie $\Rightarrow$ $SE = \frac{MB}{2}$ (3)

$SE \parallel MB$ (4)

În ΔBMC, $[RE]$ linie mijlocie $\Rightarrow$ $RE = \frac{MC}{2}$ (5)

$RE \parallel MC$ (6)

Din (1) și (3) $\Rightarrow$ $[PR] \equiv [SE]$ (7)

Din (2) și (4) $\Rightarrow$ $[QS] \equiv [RE]$ (8)

Cum $MSER$ paralelogram (4,6) $\Rightarrow$ $m(\widehat{MRE}) = m(\widehat{MSE})$ (9)

Cum ΔRPB isoscel $\Rightarrow$ $m(\widehat{PRM}) = 2x$

Cum ΔSQC isoscel $\Rightarrow$ $m(\widehat{QSM}) = 2x$

$\Rightarrow m(\widehat{PRM}) = m(\widehat{QSM})$ (10)

Din (9) si (10) unghiul PRE=unghiul QSE (11).Din (7),(8),(11) cazul L.U.L rezulta triunghiurile RPE si SEQ congruente.De unde rezulta EP=EQ.

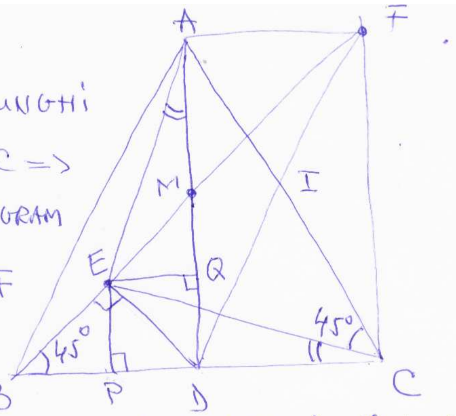
Problema 4.

Fie triunghiul ABC isoscel ($AB = AC$) şi punctele D şi M mijloacele segmentelor $[BC]$ respectiv $[AD]$. Dacă $DE \perp BM$ $(E \in (BM))$, demonstraţi că:

$$m\left(\widehat{MBC}\right) = 45^0 \Leftrightarrow m\left(\widehat{ACE}\right) = 45^0 .$$

C. Bărăscu

dem.



Fie punctul F a.î. $ADCF$ – DREPTUNGHI

$AC \cap DF = \{I\}$. Cum $BD = DC \Rightarrow$

$\Rightarrow BD \parallel= AF \Rightarrow ABDF$ – PARALELOGRAM

$\Rightarrow M \in BF$. Și $IA = ID = IC = IF$

Dar $m(\widehat{FED}) = 90^\circ \Rightarrow EI = \frac{DF}{2}$

și cum $AC = DF \Rightarrow EI = \frac{AC}{2}$

$\Rightarrow m(\widehat{AEC}) = 90^\circ \Rightarrow AE \perp EC$ (*) (ΔAEC drept. in E)

Construim $EP \perp BC$ $(P \in (BC))$ și $EQ \perp AD$ $(Q \in (AD))$

$\Rightarrow$ / Dacă $m(\widehat{MBC}) = 45^\circ \Rightarrow \Delta DBM$ dreptunghic isoscel $\Rightarrow$

$\Rightarrow E$ mij $(BM) \Rightarrow P$ și Q mij. $[BD]$ respectiv $[MD] \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} EQ = EP \\ QA = PC \end{matrix}\right\} \xRightarrow{C.C.} \Delta EPC \equiv \Delta EQA \Rightarrow EA = EC \xRightarrow{(*)} m(\widehat{ACE}) = 4$

$\Leftarrow$ / Dacă $m(\widehat{ACE}) = 45^\circ \Rightarrow \left.\begin{matrix} EC = EA \\ m(\widehat{ECP}) = m(\widehat{EAQ}) \text{ (lat. } \perp) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\xRightarrow{I.U.} \Delta PEC \equiv \Delta QEA \Rightarrow EP = EQ \Rightarrow (DE$ – bisectoarea

$\sphericalangle$ lui $ADB \Rightarrow \Delta DBM$ dreptunghic isoscel $\Rightarrow m(\widehat{MBC}) = 45$

$DE \perp BM$ (ip.)

q.e.d.