SOLUTII CLASA a VIII-a

Problema 1.

a) Să se arate că expresia $E(x,y)=\dfrac{\sqrt{y^2+1}-y+x}{x\sqrt{y^2+1}+xy+1}$ nu depinde de *x*.

***

b) Fie m, n nr. naturale cu m>2^n şi $a=\sqrt{\dfrac{m+2^n}{m-2^n}}$. Să se arate că dacă $a\in N$ atunci a este impar.

G.M.

Solutie:

a)

Notam $z=\sqrt{y^2+1}-y$ atunci $x\sqrt{y^2+1}+xy+1=x(\sqrt{y^2+1}+y)+1=x\dfrac{1}{\sqrt{y^2+1}-y}+1=\dfrac{x}{z}+1=$

$\dfrac{x+z}{z}$ *de* unde $E(x,y)=\dfrac{z+x}{\frac{z+x}{z}}=z$

b)

Avem $a^2=\dfrac{m+2^n}{m-2^n}$ de unde $m=\dfrac{2^n(a^2+1)}{a^2-1}=2^n+\dfrac{2^{n+1}}{a^2-1}\in \mathrm{N}$ deci $a^2-1\,|\,2^{n+1}$ *deci* exista $k\in \mathrm{N}$ astfel incat $a^2-1=2^k$ de unde $a^2=2^k+1$.

Daca k=0 avem $a^2=2$ contradictie cu faptul ca $a\in \mathrm{N}$.

Pentru $k\in \mathrm{N}^*\Rightarrow a^2$ *impar* $\Rightarrow a$ *impar*.

Problema 2.

Fie *a, b, c, d* numere strict pozitive a.î. $|x-y|\le 2$ pentru orice $x, y \in \{a,b,c,d\}$. Demonstrați că :

$$a+b+c+d\le\sqrt{ab+1}+\sqrt{bc+1}+\sqrt{cd+1}+\sqrt{da+1}<a+b+c+d+4\,.$$

***

Solutie:

Din $|x-y|\le 2$ rezulta

$x^2-2xy+y^2\le 4$ de unde $x+y\le 2\sqrt{1+xy}$, dand valori lui x si y: a si b, b si c, c si d, d si a, adunand relatiile obtinute rezulta inegalitatea din stanga.

Fie $\alpha=\min\{a,b\};\beta=\min\{b,c\};\chi=\min\{c,d\};\delta=\min\{d,a\}\mathbb{S}$

atunci $\sqrt{ab+1}\le\sqrt{\alpha(\alpha+2)+1}=\alpha+1$.

Analog si celelalte.De aici prin adunare rezulta
$\sqrt{ab+1}+\sqrt{bc+1}+\sqrt{cd+1}+\sqrt{da+1} \le \alpha+\beta+\chi+\delta+4 < a+b+c+d+4$, ceea ce trebuia rezolvat.

Problema 3.

Un şirag de 15 mărgele, 5 roşii şi 10 negre, sunt înşirate pe un cerc. Să se arate că:

a) Pentru orice aranjare a mărgelelor există şase consecutive dintre care două roşii şi patru negre.

b) Este adevarat ca pentru orice aranjare a mărgelelor există şase consecutive dintre care trei roşii şi trei negre ?

V. Pop

Soluţie. Vom arăta că a) este adevărată şi b) falsă.

a) Numerotăm, într-un sens ales pe cerc, mărgelele cu $1, 2, \ldots, 15$ şi considerăm toate secvenţele de câte şase consecutive:

$$S_1 = \{1,2,3,4,5,6\},\ S_2 = \{2,3,4,5,6,7,\},\ldots, S_{15} = \{15,1,2,3,4,5\}$$

şi notăm cu r_i numărul mărgelelor roşi din secvenţa S_i, $i = \overline{1,15}$. Deoarece fiecare mărgea apare în 6 secvenţe rezultă că $\sum_{i=1}^{15} r_i = 5 \cdot 6 = 30$. Dacă prin absurd $r_i \neq 2$ pentru orice $i = \overline{1,15}$ atunci există două secvenţe consecutive S_i şi S_{i+1} astfel ca $r_i < 2$ şi $r_{i+1} > 2$ (sau invers), deci $|r_{i+1} - r_i| \geq 2$. Dar în secvenţele S_i şi S_{i+1} cinci mărgele sunt comune şi atunci diferenţa $|r_{i+1} - r_i|$ nu poate fi decât 0 sau 1, contradicţie.

b) Aranjăm mărgelele astfel: 1 roşie, 2, 3, negre, 4 roşie, 5, 6 negre, 7 roşie, 8, 9 negre, 10 roşie, 11, 12 negre, 13 roşie, 14, 15 negre. În orice secvenţă de mărgele consecutive în care intră trei mărgele roşii se găsesc cel puţin 4 mărgele negre (între ele), deci lungimea unei secvenţe care conţine trei mărgele roşii nu poate fi 6.

Problema 4.

Fie *ABCDA'B'C'D'* un cub, *AB*= *a* şi punctele *E* şi *N* mijloacele segmentelor [AB] respective [*CD*]. Dacă $EF \perp AC$, $F \in (AC)$ şi punctele *E'*, *N'* sunt mijloacele segmentelor [*A'B'*] respectiv [*C'D'*], calculaţi:

a) lungimea segmentului [*FN'*]

b) *d*(*FB'*,*NN'*)

c) $m\left[\sphericalangle\left(FB, D'E'\right)\right]$

C.Bărăscu

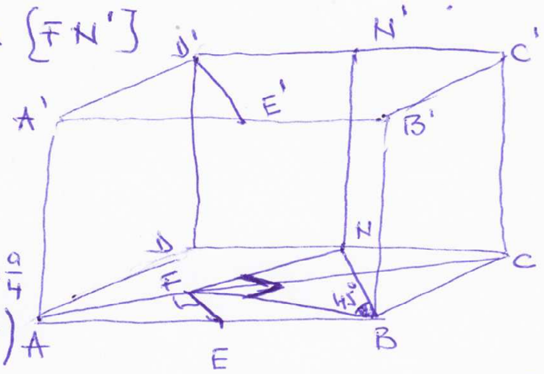
Solutie:

Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub, $AB=a$ și punctele E și N mijloacele segmentelor $[AB]$ respectiv $[CD]$. Dacă $EF \perp AC$, $F \in (AC)$ și punctele E', N' sunt mijloacele segmentelor $[A'B']$ respectiv $[C'D']$, calculați:

a. lungimea segmentului $[FN']$

b. $d(FB', NN')$

c. $m(\widehat{FB, D'E'})$



REZOLVARE.

a. Dacă $FP \perp EN \Rightarrow FP = \frac{1}{2} AE = \frac{1}{4} AB = \frac{a}{4}$

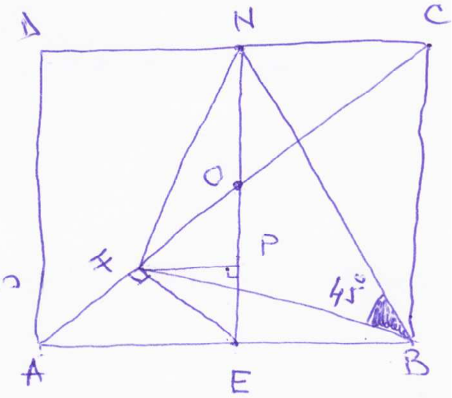
$NP = \frac{3}{4} NE = \frac{3a}{4}$ ($[FP]$ linie mij. ΔOAE)

$\overset{PIT.}{\Rightarrow} NF^2 = \frac{a^2}{16} + \frac{9a^2}{16} = \frac{10a^2}{16}$ (*)

$NN' \parallel CC' \perp (ABC) \Rightarrow m(\widehat{N'NF}) = 90°$

$NN' = a \overset{PIT.}{\Rightarrow} FN'^2 = \frac{10a^2}{16} + \frac{16a^2}{16} = \frac{26a^2}{16} \Rightarrow$

$\Rightarrow FN' = \frac{a\sqrt{26}}{4}$



b. Dacă $\mathcal{C}$ este cercul circumscris dreptunghiului $EBCN \Rightarrow F \in \mathcal{C} \Rightarrow$

$\Rightarrow m(\widehat{NFB}) = 90°$ ($[BN]$ - DIAMETRU)

Cum $ABCD$ - PĂTRAT $\wedge$ $F \in$ MEDIATOAREI SEGMENTULUI $[DN] \Rightarrow$

$\Rightarrow FB = FD = FN \Rightarrow \Delta NFB$ - DREPTUNGHIC ISOSCEL $\Rightarrow$ (**) $\Rightarrow m(\widehat{NBF}) = 45$

Dar $NN' \perp FN$ (1) și $\left.\begin{matrix} BB' \perp FN \\ FN \perp FB \end{matrix}\right\} \Rightarrow FN \perp (FBB') \Rightarrow FN \perp FB'$ (2)

$\left.\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow d(FB', NN') = FN = \frac{a\sqrt{10}}{4}$ vezi(*)

c. Cum $D'E' \parallel N'B' \parallel NB \Rightarrow m(\widehat{FB, D'E'}) = m(\widehat{FB, BN}) = 45°$

vezi(**)