SOLUTII CLASA a IX-a

Problema 1.

Fie *a, b* numere întregi astfel încât

$$a > b > 1, \quad a+b \text{ divide } ab+1 \text{ si } a-b \text{ divide } ab-1.$$

Demonstrați că $a < b\sqrt{3}$.

***

Solutie:

Avem $b^2 - 1 = b(a+b) - (ab+1)$ si din $a+b \mid ab+1$ avem $a+b \mid b^2 - 1$.

Analog folosind $b^2 - 1 = -b(a-b) + (ab-1)$ si ipoteza obtinem $a-b \mid b^2 - 1$**.**

Deoarece a+b si a-b divid pe $b^2 - 1$ rezulta $[a+b, a-b] \le b^2 - 1$; (1)

Fie d=(a,b) atunci $d \mid a \Rightarrow d \mid ab$, $d \mid a+b \Rightarrow d \mid ab+1$ de unde $d \mid 1$ deci (a,b)=1

Fie k=(a+b, a-b) din $k \mid a+b \Rightarrow k \mid ab+1$ si $k \mid a-b \Rightarrow k \mid ab-1$ *deducem* $k \mid 2$ deci $k \le 2$

Folosind identiatatea [x,y](x,y)=xy si relatia (1) obtinem

$b^2 - 1 \ge [a+b, a-b] = \dfrac{(a+b)(a-b)}{(a+b, a-b)} \ge \dfrac{a^2 - b^2}{2}$ de unde $3b^2 \ge a^2 + 2 > a^2$ deci $a < b\sqrt{3}$ ceea ce trebuia demonstrat.

Problema 2.

Fie $M = \{1, 2, ..., 2011\}$. Să se determine cel mai mic număr natural k cu proprietatea că orice submulțime cu *k* elemente a lui *M* conține două numere distincte astfel încât unul îl divide pe celălalt.

***

Solutie:

Observam ca pentru $k \le 1006$ exista submultimi cu k elemente – cele incluse in {1006,1007,…..,2011} – care nu au proprietatea ceruta.

Aratam ca k=1007 are proprietatea ceruta. Pentru aceasta efectuam urmatoarea partitie a multimii M dupa sirul numerelor prime:

$M_{p_1} = \{n \mid n = 2^l, l \in \mathrm{N}, n \le 2011\}$

$M_{p_2} = \{n \mid n = 3 \bullet 2^l, l \in \mathrm{N}, n \le 2011\}$

$M_{p_3} = \{n \mid n = 5 \bullet 2^l, l \in \mathrm{N}, n \le 2011\}$

....

$M_{p_t} = \{n \mid n = 2011 \bullet 2^l, l \in \mathrm{N}, n \le 2011\}, unde\ \mathrm{p_t} = 2011$

Atunci oricum am alege submultimi cu 1007 elemente, cum partitia are mai putin de 1006 elemente, conform principiului lui Dirichlet gasim 2 elemente apartinand aceleiasi multimi si care evident se divid unul pe altul.

Problema 3.

a) Să se arate că $\left\{\frac{2}{2011}\right\}+\left\{2\cdot\frac{2}{2011}\right\}+\left\{3\cdot\frac{2}{2011}\right\}+\ldots+\left\{2010\bullet\frac{2}{2011}\right\}=1005$.

b) Dacă *p* este un număr natural prim cu 2011, demonstrați că

$\left\{\frac{p}{2011}\right\}+\left\{2\cdot\frac{p}{2011}\right\}+\left\{3\cdot\frac{p}{2011}\right\}+\ldots+\left\{2010\cdot\frac{p}{2011}\right\}=1005$.

Soluție	**Punctaj**
a) $\left\{\frac{2}{2011}\right\}+\left\{2\cdot\frac{2}{2011}\right\}+\left\{3\cdot\frac{2}{2011}\right\}+\ldots+\left\{2010\bullet\frac{2}{2011}\right\}=$ $=\left\{\frac{2}{2011}\right\}+\left\{2\cdot\frac{2}{2011}\right\}+\ldots+\left\{1005\cdot\frac{2}{2011}\right\}+\left\{1+\frac{1}{2001}\right\}+\left\{1+\frac{3}{2001}\right\}+\ldots+\left\{1+\frac{2009}{2011}\right\}$ $=\frac{2}{2011}+\frac{4}{2011}+\ldots+\frac{2010}{2011}+\frac{1}{2011}+\frac{3}{2011}+\ldots+\frac{2009}{2011}=\frac{2010\cdot 2011}{2\cdot 2011}=1005$	**3 puncte**
b) Pentru $k\in\{1,2,\ldots,2011\}$, conform teoremei împărțirii cu rest avem $kp=2011c_k+r_k$, $0<r_k\le 2010$. Atunci $\left\{\frac{kp}{2011}\right\}=\left\{c_k+\frac{r_k}{2011}\right\}=\left\{\frac{r_k}{2011}\right\}$	**1 punct**
Arătăm că oricare ar fi $l,s\in\{1,2,\ldots,2010\}$, $l\ne s$, numerele lp și sp dau resturi diferite la împărțirea cu 2011. Avem $lp=2011c_l+r_l$, $0<r_l\le 2010$ și $lp=2011c_l+r_l$, $0<r_l\le 2010$. Scădem cele două relații şi obținem $p(l-s)=2011(c_l-c_s)+r_l-r_s$. Dacă $r_l=r_s$, atunci $p(l-s)=2011(c_l-c_s)$. Cum $(p,\ 2011)=1\Rightarrow 2011/\,l-s\ \Rightarrow\ 2011/\lvert l-s\rvert$ Deoarece $l,s\in\{1,2,\ldots,2010\}$, $l\ne s\ \Rightarrow\ 0<\lvert l-s\rvert\le 2009$, adică 2011 divide un număr din mulțimea $\{1,2,\ldots,2009\}$	**2 puncte**
În concluzie $\left\{\frac{p}{2011}\right\}+\left\{2\cdot\frac{p}{2011}\right\}+\left\{3\cdot\frac{p}{2011}\right\}+\ldots+\left\{2010\cdot\frac{p}{2011}\right\}=$ $=\left\{\frac{r_1}{2011}\right\}+\left\{\frac{r_2}{2011}\right\}+\ldots+\left\{\frac{r_{2010}}{2011}\right\}=\frac{1}{2011}+\frac{2}{2011}+\ldots+\frac{2010}{2011}=1005$	**1 punct**

Problema 4

Se consideră triunghiul ABC şi punctele $M\in(BC)$, $N\in(AC)$, $P\in(AB)$, astfel încât $BM=CN=AP$.

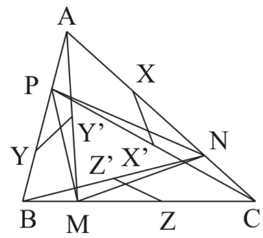
Fie X, X', Y, Y', Z, Z' respectiv mijloacele segmentelor $[AN],[CP],[BP],[AM],[CM],[BN]$.

a) Să se arate că XX' este paralelă cu bisectoarea unghiului A.

b) Să se arate că se poate construi un triunghi cu laturile de lungimi XX', YY', ZZ'.

c) Să se arate că $XX'=YY'=ZZ'$ dacă şi numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

Dana Heuberger



<u>*Soluție:*</u> **a)** Notăm $BM = CN = AP = x$. Fie $D \in (BC), E \in (AC), F \in (AB)$ respectiv picioarele bisectoarelor interioare ale triunghiului ABC.

Avem $\overrightarrow{XX'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{NC}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{c}\overrightarrow{AB} + \frac{x}{b}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{x}{2bc}\left(b \cdot \overrightarrow{AB} + c \cdot \overrightarrow{AC}\right) = \frac{x(b+c)}{2bc} \cdot \overrightarrow{AD}$.

b) Analog rezultă $\overrightarrow{YY'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{BM}\right)$ şi $\overrightarrow{ZZ'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CN}\right)$.

$\overrightarrow{XX'} + \overrightarrow{YY'} + \overrightarrow{ZZ'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CN}\right) = \vec{0}$.

c) Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC şi fie punctele U, V, W astfel încât $\overrightarrow{IU} = \overrightarrow{XX'}$, $\overrightarrow{IV} = \overrightarrow{YY'}$ şi $\overrightarrow{IW} = \overrightarrow{ZZ'}$. Deoarece $\overrightarrow{IU} + \overrightarrow{IV} + \overrightarrow{IW} = \vec{0}$ şi $IU = IV = IW$ rezultă că triunghiul UVW este echilateral, deci $m\left(\widehat{UIV}\right) = m\left(\widehat{VIW}\right) = m\left(\widehat{WIU}\right) = 120^\circ$.

Obținem $m\left(\widehat{UIV}\right) = m\left(\widehat{AIB}\right) = 120^\circ$, $m\left(\widehat{VIW}\right) = m\left(\widehat{BIC}\right) = 120^\circ$ şi $m\left(\widehat{WIU}\right) = m\left(\widehat{AIC}\right) = 120^\circ$, de unde rezultă uşor că triunghiul ABC este echilateral.