# SOLUTII CLASA A X-A

**Problema 1.**
Să se determine funcţiile cresctoare $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că
$f^2(\sin x)-3f(x)+2=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

| **Soluție** | **Punctaj** |
|---|---|
| $f(x)=\dfrac{f^2(\sin x)+2}{3},\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x+2\pi)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ este periodică. | **2 puncte** |
| Vom arăta că $f$ este constantă.<br>Fie $a,b\in\mathbb{R},\ a<b$. Cum $f$ este crescătoare, rezultă că $f(a)\le f(b)$. | **1 punct** |
| Dacă $f(a)<f(b)$, luăm $k\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $a+2k\pi>b$.<br>Avem $f(a)<f(b)\le f(a+2k\pi)=f(a)$ absurd! Rezultă că $f(a)=f(b)$.<br>Prin urmare $f$ este constantă, adică $\exists c\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)=c,\ \forall x\in\mathbb{R}$. | **2 puncte** |
| Înlocuind în relaţia funcţională din enunţ, obţinem<br>$c^2-3c+2=0\ \Leftrightarrow\ c=1$ sau $c=2$.<br>În concluzie, funcţiile căutate sunt:<br>$f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_1(x)=1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ şi $f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_2(x)=2,\ \forall x\in\mathbb{R}$. | **2 puncte** |

**Problema 2.**

a) Determinați $a,b,c\in(0,1)$ cu proprietatea

$$\log_a\frac{2b}{a+b}+\log_b\frac{2c}{b+c}+\log_c\frac{2a}{c+a}=0$$

*C. Drugan*

b) Să se determine numerele complexe $z$ cu proprietatea

$$|z-i|=|z^2-1|=|z^3+i|=1.$$

*V. Pop*

a) Solutie:
Din inegalitatea mediilor avem:
$a+b\ge 2\sqrt{ab}$ obținem $\dfrac{2b}{a+b}\le\dfrac{2b}{2\sqrt{ab}}=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ de unde prin logaritmare obtinem

$\log_a\dfrac{2b}{a+b}\ge\dfrac{1}{2}\log_a\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{2}(\log_a b-1)$ rezultă

$\log_a\dfrac{2b}{a+b}+\log_b\dfrac{2c}{b+c}+\log_c\dfrac{2a}{c+a}\ge\dfrac{1}{2}(\log_a b+\log_b c+\log_c a-3)>0$ si din ipoteza obtinem a=b=c b)

**Soluţie.** Vom arăta că singurul număr care verifică condiţiile este $z = 0$.

Fie $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ cercurile de rază 1 şi centre $O_1(i)$, $O_2(1)$, $O_3(-i)$. Un număr $z \neq 0$ verifică condiţiile dacă şi numai dacă $z \in \mathcal{C}_1$, $z^2 \in \mathcal{C}_2$ şi $z^3 \in \mathcal{C}_3$. Notăm cu $\alpha \in [0, 2\pi)$ argumentul lui $z$.

Din $z \in \mathcal{C}_1 \Rightarrow \alpha \in (0, \pi)$. (1)

Din $z^2 \in \mathcal{C}_2 \Rightarrow 2\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. (2)

Din $z^3 \in \mathcal{C}_3 \Rightarrow 3\alpha \in (\pi, 2\pi)$. (3)

Din (1) şi (2) $\Rightarrow \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$. (4)

Din (4) $\Rightarrow 3\alpha \in \left(0, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$. (5)

Relaţiile (3) şi (5) sunt contradictorii.

Observaţie. Se poate lucra şi cu scrierea $z = x + iy$ şi punerea condiţiilor dar pare foarte laborios.

## Problema 3

Se consideră funcțiile $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ care verifică relația:

$$f(2011 f(x) + f(y)) = 2011x + y, \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

Arătați că: a) $f(0) = 0$ b) $f(f(x)) = x, \quad \forall x \in \mathbb{Q}$ c) determinați funcțiile $f$ .

***Constantin Bușe, Manuela Prajea***

Soluție:

$x = y \Rightarrow f(2012 f(x)) = 2012x$ ; notăm $2012 = a$, deci $f(af(x)) = ax$ (*) și cu schimbarea de variabilă $x \to af(x)$ se obține $f(af(af(x))) = a^2 f(x)$ și aplicând aici (*) obținem $f(a^2x) = a^2 f(x)$.

Pentru $x = 0$ se obține imediat $f(0) = 0$ și cu ipoteza avem acum $f(f(y)) = y$ (**) deci $f$ inversabilă cu $f^{-1} = f$, prin urmare $f$ bijecție.

Aplicând $f$ în relația din ipoteză, cu (**) și $2011 = b$ avem $bf(x) + f(y) = f(bx + y)$ (***)

Pentru $y = 0$ în ipoteză se obține

$f(bf(x)) = bx \Rightarrow f(f(bf(x))) = f(bx) \Rightarrow bf(x) = f(bx)$ (am aplicat din nou (*)).

Aplicând aceasta în (***) ajungem în sfarșit la $f(bx) + f(y) = f(bx + y), \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$ și de aici , deoarece $b \neq 0$ rezultă imediat că $f(x) + f(y) = f(x + y), \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$.

Din acest punct , se obține (inducție sau ecuația Cauchy) $f(x) = cx, \quad \forall x \in \mathbb{Q}$, unde $c = f(1)$ și cu (**) găsim și pe $c = \pm 1$.

Deci funcțiile cerute sunt $f(x) = x$ și $f(x) = -x$.

**Problema 4**

Fie $\alpha \in \mathbb{C}$ cu proprietatea că există punctele *A*, *B*, *C*, *D* situate în cadranele I, II, III respectiv IV având afixele $z_1, z_2, z_3, z_4$ care verifică $|z_k - \alpha| \le 1$, $k = \overline{1,4}$.
Să se arate că $|\alpha| \le 1$.

*S. Ulmeanu, V. Gorgotă*

**Solutie**

$\exists a \in (0,1)$ a.i $\mathrm{a}z_1 + (1-a)z_2 \in iR$
*atunci din* $|z_1 - \alpha| \le 1|a$ si $|z_2 - \alpha| \le 1|1-a$ prin adunare obtinem $|it - \alpha| \le 1$ ; (1) unde it=$\mathrm{az}_1 + (1-a)z_2$

Analog exista $b \in (0,1)$a.i $\mathrm{b}z_3 + (1-b)z_4 = im \in iR$ si $|\mathrm{im}\text{-}\alpha| \le 1$ ; (2)
Analog exista $k \in (0,1)$a.i $\mathrm{kit} + (1-k)im = 0$ de unde inmultind relatia (1) cu k si relatia (2) cu 1-k, aplicand inegalitatea modulului obtinem cerinta problemei.