SOLUTII CLASA A XI-A

Problema 4

Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale strict pozitive cu proprietatea că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ are loc $a_1+a_2+...+a_n<n^2$. Demonsrați că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right)=\infty$.

M.Piticari

Soluție	**Punctaj**
Şirul $(b_n)_{n\geq 1}$, $b_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}$ este strict crescător, deci $(b_n)_{n\geq 1}$ are limită.	**2 puncte**
Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=l,\ l\in\mathbb{R}$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty}(b_{2n}-b_n)=0$ (1)	**2 puncte**
Dar $b_{2n}-b_n=\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_{n+2}}+...+\frac{1}{a_{2n}}\geq\frac{n^2}{a_{n+1}+a_{n+2}+...+a_{2n}}>\frac{n^2}{a_1+a_2+...+a_{2n}}>\frac{n^2}{4n^2}=\frac{1}{4}$, ceea ce contrazice (1)	**2 puncte**
Rămâne $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$	**1 punct**

Problema 1

Fie $A,B\in M_3(\mathbb{R})$ astfel încât $A^2+B^2=AB=A+B$. Să se arate că $\det(A)=\det(B)=\det(A+B)=0$.

M.Piticari, V.Cerbu

Soluție	**Punctaj**
$AB=A+B\Rightarrow(A-I_3)(B-I_3)=I_3\Rightarrow(B-I_3)(A-I_3)=I_3\Rightarrow BA=A+B$. Deci $AB=BA$	**2 puncte**
$A^3+B^3=(A+B)(A^2+B^2-AB)=O_3\Rightarrow A^3=-B^3\Rightarrow\det(A)=-\det(B)$	**2 puncte**
$A^2+B^2=AB\Rightarrow\det(A^2+B^2)=\det(A)\cdot\det(B)=-(\det(A))^2\leq 0$	**1 punct**
Cum $AB=BA$ rezultă că $\det(A^2+B^2)\geq 0$	**1 punct**
Obținem $\det(A^2+B^2)=0$ de unde rezultă $\det(A)=\det(B)=\det(A+B)=0$	**1 punct**

Problema 3

Fie $(x_n)_{n\in N^*}$ şirul definit prin $x_n\in[0,1]$ arbitrar şi $x_{n+1}=\frac{1}{n}x_n+\frac{n-1}{n}x_n{}^2$, pentru orice $n\in N^*$.

(i) Arătați că $(x_n)_{n\in N^*}$ este convergent şi aflați $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$;

(ii) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\sqrt[n]{x_n}$.

Nicolae Bourbăcuț, Viorel Cornea şi Ioan Şerdean

Soluție. (i) Dacă $x_1=1$ atunci $x_n=1,\ \forall n\in N^*$. şi în concluzie $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

Dacă $x_1 \in [0,1)$ atunci $x_{n+1} - x_n = \dfrac{n-1}{n} x_n \cdot (x_n - 1)$, $\forall n \in N^*$. şi cum $0 \le x_n < 1$ pentru orice $n \in N^*$. deducem că $(x_n)_{n\in N^*}$ este convergent şi are limita 0.

(ii) Dacă $x_1 = 1$ sau $x_1 = 0$ cerința este imediată.

Dacă $x_1 \in (0,1)$ fie $(y_n)_{n\ge 1}$ şirul definit prin $y_n = n^n \cdot x_n$, $\forall n \in N^*$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot (n+1) \cdot \frac{x_{n+1}}{x_n} = e \cdot \lim_{n\to\infty} (n+1) \cdot \frac{x_{n+1}}{x_n} \quad (1)$$

Pe de altă parte

$$\lim_{n\to\infty} (n+1) \cdot \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n+1}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot (n+1) \cdot x_n\right] \quad (2)$$

Cum $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} \cdot \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 0$ din criteriul raportului avem că $\lim_{n\to\infty} n \cdot x_n = 0$ şi atunci din (2) obținem că $\lim_{n\to\infty} (n+1) \cdot \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1$, ceea ce împreună cu (1) ne conduc la $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{y_n} = e$.

Problema 2

Fie matricele $A \in M_{3;2}(R)$, $B \in M_{2;3}(R)$ astfel ca

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Să se determine $B \cdot A$.

Vasile Pop

Soluţie. Se verifică relaţia $(A \cdot B)^2 = A \cdot B$, în care dacă înmulţim în stânga cu B şi în dreapta cu A obţinem:

$$(B \cdot A)^3 = (B \cdot A)^2 \qquad (*)$$

Pe de altă parte $(A \cdot B)^2 = A \cdot (BA) \cdot B$ şi

$$\operatorname{rang} A \cdot (BA) \cdot B \le \operatorname{rang}(BA) \Leftrightarrow \operatorname{rang}(BA) \ge \operatorname{rang}(AB)^2 = \operatorname{rang}(AB) = 2,$$

deci rang $BA = 2$ şi atunci matricea BA este inversabilă. Înmulţim în relaţia $(*)$ inversa matricei $(BA)^2$ şi obţinem

$$B \cdot A = I_2.$$

Observaţie. Un exemplu de matrice A, B cu proprietatea dată este:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$