

## SOLUTII CLASA A XI-A

### Problema 4

Fie  $(a_n)_{n \geq 1}$  un șir de numere reale strict pozitive cu proprietatea că pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$  are loc

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n < n^2. \text{ Demonstrați că } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) = \infty.$$

M.Piticari

Soluție	Punctaj
Șirul $(b_n)_{n \geq 1}$ , $b_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$ este strict crescător, deci $(b_n)_{n \geq 1}$ are limită.	<b>2 puncte</b>
Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l$ , $l \in \mathbb{R}$ atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_{2n} - b_n) = 0$ (1)	<b>2 puncte</b>
Dar $b_{2n} - b_n = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+2}} + \dots + \frac{1}{a_{2n}} \geq \frac{n^2}{a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n}} > \frac{n^2}{a_1 + a_2 + \dots + a_{2n}} > \frac{n^2}{4n^2} = \frac{1}{4}$ , ceea ce contrazice (1)	<b>2 puncte</b>
Rămâne $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$	<b>1 punct</b>

### Problema 1

Fie  $A, B \in M_3(\mathbb{R})$  astfel încât  $A^2 + B^2 = AB = A + B$ . Să se arate că  $\det(A) = \det(B) = \det(A + B) = 0$ .

M.Piticari, V.Cerbu

Soluție	Punctaj
$AB = A + B \Rightarrow (A - I_3)(B - I_3) = I_3 \Rightarrow (B - I_3)(A - I_3) = I_3 \Rightarrow BA = A + B$ . Deci $AB = BA$	<b>2 puncte</b>
$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 + B^2 - AB) = O_3 \Rightarrow A^3 = -B^3 \Rightarrow \det(A) = -\det(B)$	<b>2 puncte</b>
$A^2 + B^2 = AB \Rightarrow \det(A^2 + B^2) = \det(A) \cdot \det(B) = -(\det(A))^2 \leq 0$	<b>1 punct</b>
Cum $AB = BA$ rezultă că $\det(A^2 + B^2) \geq 0$	<b>1 punct</b>
Obținem $\det(A^2 + B^2) = 0$ de unde rezultă $\det(A) = \det(B) = \det(A + B) = 0$	<b>1 punct</b>

### Problema 3

Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  șirul definit prin  $x_n \in [0,1]$  arbitrar și  $x_{n+1} = \frac{1}{n}x_n + \frac{n-1}{n}x_n^2$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

(i) Arătați că  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  este convergent și aflați  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ;

(ii) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sqrt[n]{x_n}$ .

Nicolae Bourbăcuț, Viorel Cornea și Ioan Șerdean

Soluție. (i) Dacă  $x_1 = 1$  atunci  $x_n = 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . și în concluzie  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ .

Dacă  $x_1 \in [0,1)$  atunci  $x_{n+1} - x_n = \frac{n-1}{n} x_n \cdot (x_n - 1)$ ,  $\forall n \in N^*$ . și cum  $0 \leq x_n < 1$  pentru orice  $n \in N^*$ . deducem că  $(x_n)_{n \in N^*}$  este convergent și are limita 0.

(ii) Dacă  $x_1 = 1$  sau  $x_1 = 0$  cerința este imediată.

Dacă  $x_1 \in (0,1)$  fie  $(y_n)_{n \geq 1}$  șirul definit prin  $y_n = n^n \cdot x_n$ ,  $\forall n \in N^*$ . Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot (n+1) \cdot \frac{x_{n+1}}{x_n} = e \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \cdot \frac{x_{n+1}}{x_n} \quad (1)$$

Pe de altă parte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \cdot \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n+1}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot (n+1) \cdot x_n \right] \quad (2)$$

Cum  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{x_{n+1}}{x_n} = 0$  din criteriul raportului avem că  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot x_n = 0$  și atunci din (2) obținem

că  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \cdot \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$ , ceea ce împreună cu (1) ne conduc la  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{y_n} = e$ .

## Problema 2

Fie matricele  $A \in M_{3;2}(\mathbb{R})$ ,  $B \in M_{2;3}(\mathbb{R})$  astfel ca

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Să se determine  $B \cdot A$ .

Vasile Pop

**Soluție.** Se verifică relația  $(A \cdot B)^2 = A \cdot B$ , în care dacă înmulțim în stânga cu  $B$  și în dreapta cu  $A$  obținem:

$$(B \cdot A)^3 = (B \cdot A)^2 \quad (*)$$

Pe de altă parte  $(A \cdot B)^2 = A \cdot (BA) \cdot B$  și

$$\text{rang } A \cdot (BA) \cdot B \leq \text{rang } (BA) \Leftrightarrow \text{rang } (BA) \geq \text{rang } (AB)^2 = \text{rang } (AB) = 2,$$

deci  $\text{rang } BA = 2$  și atunci matricea  $BA$  este inversabilă. Înmulțim în relația (\*) inversa matricei  $(BA)^2$  și obținem

$$B \cdot A = I_2.$$

**Observație.** Un exemplu de matrice  $A, B$  cu proprietatea dată este:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$