BAREM CLASA a XII-a

Problema 1 *Se consideră $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi mulţimea $M_n = \left\{x \in \mathbb{Z}_n \middle| x^2 = \widehat{3}x + \widehat{1}\right\}$.*

(a) Să se determine M_3 şi M_4.

(b) Dacă mulţimea M_n are un număr impar de elemente, să se determine n.

Dana Heuberger

Soluţie. (a) $M_3 = \left\{x \in \mathbb{Z}_3 \middle| x^2 = \widehat{1}\right\} = \left\{\widehat{1}, \widehat{2}\right\}$ iar $M_4 = \emptyset$.

(b) Evident, $\widehat{0} \notin M_n$. Observăm că dacă $x \in M_n$, atunci şi $\widehat{3} - x \in M_n$.

Într-adevăr, $\left(\widehat{3} - x\right)\left(\widehat{3} - x - \widehat{3}\right) = x\left(x - \widehat{3}\right) = \widehat{1}$.

Dacă M_n are un număr impar de elemente, atunci există $x_0 \in M_n$, astfel încât $x_0 = \widehat{3} - x_0$. Deducem că $\widehat{2}x_0 = \widehat{3}$.

Din $x_0^2 = \widehat{3}x_0 + \widehat{1}$ rezultă $\widehat{2}x_0^2 = \widehat{6}x_0 + \widehat{2} \Leftrightarrow x_0\left(\widehat{2}x_0\right) = \widehat{3}\left(\widehat{2}x_0\right) + \widehat{2}$

Deducem $\widehat{3}x_0 = \widehat{11} \Leftrightarrow x_0 + \widehat{2}x_0 = \widehat{11} \Leftrightarrow x_0 = \widehat{8}$. Din $\widehat{2}x_0 = \widehat{3}$ rezultă $\widehat{16} = \widehat{3}$ deci $\widehat{13} = \widehat{0}$, adică $n = 13$.

Pentru $n = 13$, $x^2 = \widehat{3}x + \widehat{1} \Leftrightarrow x^2 - \widehat{3}x - \widehat{1} = \widehat{0} \Leftrightarrow x^2 + \widehat{10}x + \widehat{12} = \widehat{0} \Leftrightarrow x^2 + \widehat{10}x + \widehat{25} = \widehat{0} \Leftrightarrow \left(x + \widehat{5}\right)^2 = \widehat{0} \Leftrightarrow x = -\widehat{5} = \widehat{8}$ este singurul element al lui M_n.

Aşadar $M_n = \left\{\widehat{8}\right\}$, deci, $n = 13$ este singura soluţie. ■

Problema 2.

Fie p și q două numere prime diferite și $(G, \cdot)$ un grup necomutativ cu pq elemente

a) Arătați că $Z(G) = \{e\}$, unde e este elementul neutru din G.

($Z(G) = \{x \in G \,/\, xy = yx,\ \forall y \in G\}$ se numeşte centrul grupului G centrul grupului G)

b) Să se demonstreze că G conține două elemente de acelasi ordin care nu comută.

Soluție	**Punctaj**
a) G nu conține elemente de ordin pq (în caz contrar ar fi grup ciclic, deci comutativ) (1)	**1 punct**
Dacă $\exists a \in Z(G)$, $a \neq e$, atunci ord(a) = p sau ord(a) = q. Să presupunem ord(a) = p Conform teoremei lui Cauchy, $\exists b \in G$ cu ord(b) = q.	**1 punct**
Cum $ab = ba$ rezultă că ord(ab) = pq, absurd!	**1 punct**
b) Presupunem că orice două elemente de acelaşi ordin comută. Atunci $H_p = \left\{x \in G \,/\, x^p = e\right\}$ și $H_q = \left\{x \in G \,/\, x^q = e\right\}$ sunt subgrupuri în G.	**2 puncte**
Cum $\operatorname{ord}\left(H_p\right)$ divide $\operatorname{ord}(G)$, rezultă că H_p are p elemente, deci în G sunt $p-1$ elemente de ordin p. Analog se arată că în G sunt $q-1$ elemente de ordin q.	**1 punct**
Cum $H_p \cup H_q = G$, obținem $p-1+q-1+1 = pq$, de unde $(p-1)(q-1) = 0$, absurd!	**1 punct**

Problema 3.

Spunem că o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ are proprietetea (P) dacă f este integrabilă pe orice interval $[a,\, b]$ şi $\int_0^x f(t)\,dt = f(x)-1,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

a) Determinați funcțiile ce au proprietatea (P) şi sunt continue.

b) Determinați funcțiile cu proprietatea (P) şi care admit primitive.

Soluție	**Punctaj**
a) Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. Deoarece f este continuă, rezultă că F este o primitivă a lui f cu $F(0)=0$.	**1 punct**
Pentru $a\in\mathbb{Q}$ considerăm un şir de numere iraționale $(a_n)_{n\ge 1}$ cu $a_n\to a$. Trecând la limită în relația $F(x_n)=f(x_n)-1,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ obținem $F(a)=f(a)-1$. Prin urmare $F(x)=f(x)-1,\ \forall x\in\mathbb{R}$	**1 punct**
$f(x)-F(x)=1 \ \lvert\cdot e^{-x},\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow \left(F(x)\cdot e^{-x}\right)'=e^{-x},\ \forall x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow F(x)\cdot e^{-x}=-e^{-x}+k,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow F(x)=-1+ke^{x},\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x)=ke^{x},\ \forall x\in\mathbb{R}$ Din $f(0)=1$ obținem $k=1$, deci $f(x)=e^{x},\ \forall x\in\mathbb{R}$.	**2 puncte**
b) Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. Deoarece f este integrabilă pe orice interval $[a,\, b]$, rezultă că F este continuă pe $\mathbb{R}$. Considerăm $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=F(x)-f(x)+1$. Evident $g(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.	**1 punct**
g admite primitive $\Rightarrow$ g are proprietatea lui Darboux Deoarece $\mathbb{Q}$ este mulțime numărabilă, avem $g(\mathbb{R})=g(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cup g(\mathbb{Q})=\{0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\ldots\}$ şi cum g are proprietatea lui Darboux, rezultă că $g(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Avem $F(x)=f(x)-1,\ \forall x\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ f(x)=e^{x},\ \forall x\in\mathbb{R}$	**2 puncte**

Problema 4.

a) Să se demonstreze că ecuația $\operatorname{arcctg}(\operatorname{arcctg} x)=x$ are o singură soluție reală.

b) Să se determine funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ce admit primitive şi verifică relația $f(\operatorname{arcctg} x)=\left(1+x^2\right)f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Soluție	**Punctaj**
a) Considerăm funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\operatorname{arcctg}(\operatorname{arcctg} x)-x$; g este derivabilă şi $g'(x)=\dfrac{1}{\left(1+x^2\right)\left(1+\operatorname{arcctg}^2 x\right)}-1<0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ g este strict descrescătoare. Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=-\infty\Rightarrow$ ecuația $g(x)=0$ are o singură solutie reală.	**2 puncte**
b) Avem $\dfrac{f(\operatorname{arcctg} x)}{1+x^2}=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow(1)\ \ F(\operatorname{arcctg} x)+F(x)=k,\ \forall x\in\mathbb{R}$, unde F este o primitivă a lui f.	**2 puncte**
$F\left(\operatorname{arcctg}(\operatorname{arcctg} x)\right)+F(\operatorname{arcctg} x)=k\Rightarrow F\left(\operatorname{arcctg}(\operatorname{arcctg} x)\right)=F(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.$ Notăm $h(x)=\left(\operatorname{arcctg}(\operatorname{arcctg} x)\right)$ şi $h_n=h\circ h\circ\ldots\circ h$ (de n ori). Inductiv se obşine $F\left(h_n(x)\right)=F(x),\ \forall x\in\mathbb{R}\quad(2)$	**1 punct**
Fie $x\in\mathbb{R}$ fixat. Cum g este strict crescătoare şi mărginită, rezultă că şirul $\left(h_n(x)\right)_{n\ge 1}$ este convergent iar limita sa este unica soluție a ecuației $h(x)=x$.	**1 punct**
Notăm această soluție cu x_0. Trecând la limită în (2) obținem $F(x)=F(x_0)$. Cum x a fost ales arbitrar, deducem că F este funcție constantă, deci $f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.	**1 punct**