

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"**

ETAPA NAȚIONALĂ – 20 aprilie 2011

Profil real, specializarea științele naturii

Clasa a IX-a

1. Fie $a, b, c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $a + b + c = \frac{\pi}{2}$. Demonstrați că

$$\operatorname{tga} \cdot \operatorname{tgb} + \operatorname{tgb} \cdot \operatorname{tgc} + \operatorname{tgc} \cdot \operatorname{tga} = 1.$$

Soluție:

Avem că $c = \frac{\pi}{2} - (a + b)$, deci $\operatorname{tgc} = \frac{1}{\operatorname{tg}(a + b)}$ 2p

Rezultă că $\operatorname{tgc} = \frac{1 - \operatorname{tga} \cdot \operatorname{tgb}}{\operatorname{tga} + \operatorname{tgb}}$ 2p

Obținem că $(\operatorname{tga} + \operatorname{tgb}) \cdot \operatorname{tgc} = 1 - \operatorname{tga} \cdot \operatorname{tgb}$, de unde cerința problemei 3p

2. În urma unui accident la o fabrică de produse petrochimice, o cantitate de 2 tone de nitrați a fost deversată într-un râu din apropiere. Concentrația de nitrați maxim admisă este de 0,05 mg / l, iar cea măsurată în urma accidentului este de 250 mg / l. Măsurile luate pentru remedierea situației fac așa încât, în fiecare zi de la contaminare, concentrația de nitrați în zona respectivă să scadă la jumătate față de ziua precedentă.

a) În câte zile concentrația de nitrați scade sub concentrația maximă admisă?

b) Știind că 10% din viața activă a zonei moare zilnic din cauza poluării, aflați ce procent din populația inițială mai este în viață în ziua în care concentrația de nitrați reintră în limite normale.

Marian Panțiruc

Soluție:

a) După n zile de la accident, concentrația de nitrați este $\frac{250}{2^n}$ mg / l 2p

Se impune condiția $\frac{250}{2^n} \leq 0,05$ și obținem $n \geq 13$, adică după 13 zile concentrația de nitrați scade sub cea maximă admisă 2p

b) După 13 zile, populația devine $\left(\frac{9}{10}\right)^{13}$ din cea inițială 2p

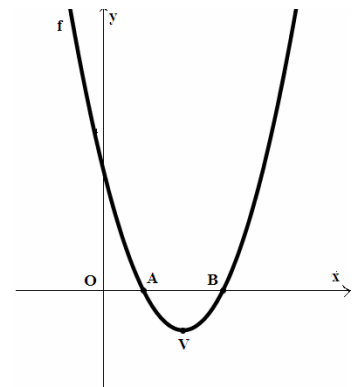
Procentul cerut este de $\left(\frac{9}{10}\right)^{13} \cdot 100\%$ 1p

3. O funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, cu $a, b, c \in \mathbb{Z}$, are reprezentarea geometrică a graficului ca în figura alăturată.

a) Arătați că, dacă $a \cdot c \geq 4$, atunci $|b| \geq 5$.

b) Determinați numărul a în cazul în care coordonatele punctelor A și B sunt $A(1, 0)$, respectiv $B(3, 0)$, iar triunghiul AVB are aria egală cu 1.

Lucian Dragomir



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ – 20 aprilie 2011

Profil real, specializarea științele naturii

Soluție:

a) Parabola intersectează axa Ox în două puncte distincte, așadar $b^2 > 4ac$ 2p

Obținem că $b^2 > 16$ și, cum $b \in \mathbb{Z}$, rezultă că $|b| \geq 5$ 1p

b) Avem că $x_V = 2 = -\frac{b}{2a}$, prin urmare $b = -4a$ 1p

Din $f(1) = 0$ deducem că $a + b + c = 0$, de unde $c = 3a$ 1p

Astfel, $f(x) = a(x^2 - 4x + 3)$, $a \neq 0$. Observăm că $y_V = f(2) = -a$, așadar aria triunghiului AVB este egală cu $|a| = 1$ 1p

Cum parabola are ramurile în sus, rezultă că $a > 0$ și atunci $a = 1$ 1p

4. Numim *placă* un triunghi dreptunghic, împreună cu interiorul său.

Dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, arătați că interiorul oricărui patrulater convex poate fi acoperit complet cu n plăci care nu se suprapun (au interioarele disjuncte).

Gabriel Popa

Soluție:

Observăm întâi că interiorul oricărui triunghi poate fi împărțit în două triunghiuri dreptunghice, ducând înălțimea din vârful unghiului cel mai mare (precauție necesară dacă triunghiul inițial este obtuzunghic) 2p

Dacă $n = 4$, o diagonală împarte interiorul patrulaterului în două triunghiuri, iar după procedeul de mai sus obținem o acoperire cu 4 plăci 2p

Dacă se poate acoperi patrulaterul folosind k plăci, putem realiza o acoperire cu $k+1$ plăci împărțind una dintre plăci în două cu ajutorul înălțimii corespunzătoare ipotenuzei 3p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ – 20 aprilie 2011

Profil real, specializarea științele naturii

Clasa a X-a

1. Un grup de patru tineri se numește *frumos* dacă din grup face parte cel puțin o fată. Stabiliți câte grupuri *frumoase* se pot forma din echipa de dans sportiv a unui liceu, alcătuită din Alina, Bogdan, Cristina, Daniel, Elena, Florin, Gabriela și Horațiu.

Lucian Dragomir

Soluție:

În echipa de dans sunt 4 fete și 4 băieți, deci un grup frumos poate avea în componența sa una, două, trei sau patru fete și restul (până la 4) băieți. 2p

Există $C_4^1 \cdot C_4^3 = 16$ grupuri de patru tineri care conțin câte o fată, 1p

$C_4^2 \cdot C_4^2 = 36$ grupuri de patru tineri care conțin câte două fete, 1p

$C_4^3 \cdot C_4^1 = 16$ grupuri de patru tineri care conțin câte trei fete 1p

și $C_4^4 \cdot C_4^0 = 1$ grup format din patru fete. 1p

Numărul total de grupuri frumoase este 69. 1p

2. În plan, considerăm mulțimea \mathcal{P} a tuturor punctelor cu ambele coordonate întregi, precum și mulțimea \mathcal{D} a tuturor dreptelor care trec prin cel puțin două puncte din \mathcal{P} .

a) Arătați că prima bisectoare (dreapta de ecuație $y = x$) aparține mulțimii \mathcal{D} .

b) Arătați că orice dreaptă din mulțimea \mathcal{D} conține cel puțin 3 puncte din mulțimea \mathcal{P} .

c) Arătați că nu există nicio dreaptă oblică d în mulțimea \mathcal{D} astfel încât $A(1, \sqrt{2012}) \in d$.

Ioana-Cătălina Anton

Soluție:

a) Cum punctele $O(0, 0)$ și $B(1, 1)$ se află pe prima bisectoare și aparțin și mulțimii \mathcal{P} , deducem că prima bisectoare aparține mulțimii \mathcal{D} 2p

b) Fie $d \in \mathcal{D}$; atunci există $M(x_0, y_0) \in d$ și $N(x_1, y_1) \in d$, cu $x_0, y_0, x_1, y_1 \in \mathbb{Z}$. Se verifică imediat că simetricul punctului M față de punctul N este punctul $S(2x_1 - x_0, 2y_1 - y_0) \in d$ 2p

c) Fie $d \in \mathcal{D}$; atunci există $M(x_0, y_0) \in d$ și $N(x_1, y_1) \in d$, cu $x_0, y_0, x_1, y_1 \in \mathbb{Z}$. Deducem imediat că panta dreptei d este $m_d = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \in \mathbb{Q}$, iar ecuația dreptei este $y - y_0 = m_d(x - x_0)$ 1p

Dacă, prin reducere la absurd, $A(1, \sqrt{2012}) \in d$, atunci $\sqrt{2012} - y_0 = m_d(1 - x_0)$, de unde $\sqrt{2012} = y_0 + m_d(1 - x_0) \in \mathbb{Q}$, contradicție! 2p

3. Smaranda alege atent un număr natural a , apoi Nicu alege la întâmplare un număr real strict pozitiv x . Dacă unul dintre numerele $A = 10 - \log_2(x^2)$ sau $B = \log_2(16x)$ este cel puțin egal cu a , atunci Nicu îi va face Smarandei un cadou în valoare de 3^a lei.

Ce număr trebuie să aleagă Smaranda pentru a fi sigură că va primi un cadou cât mai valoros?

Lucian Dragomir



**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"**

ETAPA NAȚIONALĂ – 20 aprilie 2011

Profil real, specializarea științele naturii

Din $A \geq a$ sau $B \geq a$, deducem $x \leq 2^{\frac{10-a}{2}}$ sau $x \geq 2^{a-4}$ 2p
Pentru a fi sigură că va primi un cadou, Smaranda ar trebui să aleagă un număr a astfel încât
 $2^{a-4} \leq 2^{\frac{10-a}{2}}$, 2p
adică $a \leq 6$ 2p
Cum funcția $a \mapsto 3^a$ este strict crescătoare, Smaranda ar trebui să aleagă numărul $a = 6$ 1p

4. Fie $u = 2012^{3n}$ și $v = 2012^{2n} \cdot 2011^n + 2012^n \cdot 2011^{2n} + 2 \cdot 2011^{3n}$, $n \in \mathbb{N}$.

- a) Arătați că există valori ale lui n pentru care $u < v$.
- b) Arătați că există valori ale lui n pentru care $u > v$.

Constantin Apostol și Gabriel Popa

Soluție:

Observăm că

$$\begin{aligned} u - v &= 2012^{3n} - 2011^{3n} - 2011^n \cdot (2012^{2n} + 2012^n \cdot 2011^n + 2011^{2n}) \\ &= (2012^n - 2 \cdot 2011^n) \cdot (2012^{2n} + 2012^n \cdot 2011^n + 2011^{2n}), \end{aligned}$$

unde a doua paranteză este strict pozitivă, indiferent de valoarea lui n 2p

a) Pentru $n = 0$ avem că $2012^0 - 2 \cdot 2011^0 = -1 < 0$, deci $u < v$ 2p

b) Folosind binomul lui Newton, pentru prima paranteză are loc evaluarea

$$2012^n - 2 \cdot 2011^n = (2011+1)^n - 2 \cdot 2011^n = C_n^1 2011^{n-1} + \dots + C_n^n - 2011^n > (n-2011)2011^{n-1}.$$

(Altfel, conform inegalității lui Bernoulli obținem că

$$2012^n - 2 \cdot 2011^n = 2011^n \left(\left(1 + \frac{1}{2011} \right)^n - 2 \right) \geq 2011^n \left(1 + \frac{n}{2011} - 2 \right). \dots\dots\dots 2p$$

Pentru n suficient de mare (de exemplu, $n = 2012$) avem că $u > v$ 1p



**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"**

ETAPA NAȚIONALĂ – 20 aprilie 2011

Profil real, specializarea științele naturii

Clasa a XI a

1. Fie $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

- a) Scrieți ecuația dreptei d care este asimptotă oblică la graficul funcției f .
- b) Argumentați că funcția f este convexă.
- c) Demonstrați că aria suprafeței cuprinsă între dreapta d , graficul funcției f , dreptele $x = 1$ și $x = 2$ este mai mică decât $\frac{5}{12}$.

Soluție:

a) $d: y = x - 1$ 2p

b) $f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} > 0, \forall x \in [0, \infty) \Rightarrow f$ este convexă 2p

c) Dreapta $x = 1$ intersectează pe d în $A(1, 0)$ și graficul lui f în $B\left(1, \frac{1}{2}\right)$. Dreapta $x = 2$ intersectează graficul lui f în $C\left(2, \frac{4}{3}\right)$ și dreapta d în punctul $D(2, 1)$ 1p

Aria cerută este mai mică decât $A_{ABCD} = \frac{5}{12}$ 2p

2. a) Arătați că ecuația $x^5 - x = m$ are cel mult trei soluții reale, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$.

b) Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $a^5 - a = b^5 - b = c^5 - c = d^5 - d$. Demonstrați că determi-

nantul
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$
 este nul.

Antonia Ciocan

Soluție:

a) Demonstrarea cerinței 3p

b) Conform a), există două numere egale printre cele patru numere date 2p

Atunci determinantul dat are (măcar) două coloane egale, deci este nul 2p

3. Pentru fiecare număr natural n se consideră matricea $A(n) = \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ n & 1 & n \\ n & n & 1 \end{pmatrix}$.

a) Arătați că nu există niciun număr natural n pentru care matricea $A(n)$ să aibă rangul 2.

b) Se numește *pas* următoarea modificare a elementelor unei matrice: fiecare element de pe diagonala principală se mărește sau se micșorează cu 2, iar toate celelalte șase elemente se măresc sau se micșorează cu 1. Stabiliți dacă este posibil ca, plecând de la $A(2)$, după 2012 astfel de *pași*, determinantul matricei obținute să fie egal cu 2012.

Ovidiu Stăniloiu și Lucian Dragomir



**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"**

ETAPA NAȚIONALĂ – 20 aprilie 2011

Profil real, specializarea științele naturii

Soluție:

a) $\det A(n) = (2n + 1)(1 - n)^2$ 1p

O condiție necesară (nu și suficientă) pentru ca rangul matricei să fie egal cu 2 este $\det A(n) = 0$; cum n este număr natural, deducem $n = 1$ 1p

Însă, în acest caz, rangul matricei este 1 și concluzia se impune..... 1p

b) Elementele de pe diagonala principală vor fi mereu impare. 1p

După un număr par de pași, elementele care nu aparțin diagonalei principale rămân pare 1p

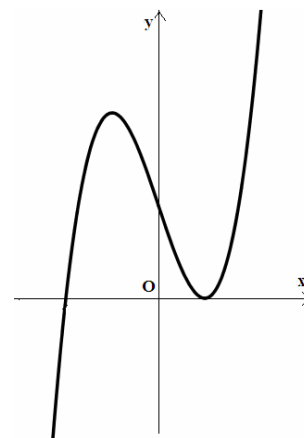
Determinantul matricei obținute va fi astfel un număr impar, deci nu poate fi egal cu 2012 2p

4. O funcție $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^3 + bx + c$, are reprezentarea geometrică a graficului ca în figura alăturată. Demonstrați că:

a) $8a + 2b + c \geq 0$

b) $abc < 0$.

Lucian Dragomir



Soluție:

a) Lectura grafică arată că $f(2) \geq 0$, deci $8a + 2b + c \geq 0$ 2p

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty \Rightarrow a > 0$ 1p

$f(0) = c > 0$ 1p

Deoarece f are două puncte de extrem distincte, ecuația de gradul doi care dă punctele critice, $3ax^2 + b = 0$, are două soluții reale distincte; deducem că $b < 0$ 2p

În concluzie, $abc < 0$ 1p



**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"**

ETAPA NAȚIONALĂ – 20 aprilie 2011

Profil real, specializarea științele naturii

Clasa a XII-a

1. Fie mulțimea $A = \{LEU, TIGRU, URS, LUP, IEPURE\}$. Pe A definim o lege de compoziție asociativă, notată \heartsuit , descrisă mai jos:

\heartsuit	LEU	TIGRU	URS	LUP	IEPURE
LEU	TIGRU	URS	LUP	IEPURE	LEU
TIGRU	URS	LUP	IEPURE	LEU	TIGRU
URS	LUP	IEPURE	LEU	TIGRU	URS
LUP	IEPURE	LEU	TIGRU	URS	LUP
IEPURE	LEU	TIGRU	URS	LUP	IEPURE

- a) Câte legi de compoziție comutative se pot defini pe A ? Se află \heartsuit printre aceste legi?
 b) Legea de compoziție \heartsuit are element neutru?
 c) Calculați $LEU^{2012} = \underbrace{LEU \heartsuit LEU \heartsuit \dots \heartsuit LEU}_{2012}$.
 d) Rezolvați ecuația $LEU \heartsuit x \heartsuit TIGRU = IEPURE$, unde necunoscuta este $x \in A$.

Soluție:

- a) Se pot defini 5^{15} legi comutative 1p
 Legea \heartsuit este comutativă, deoarece tabla operației este simetrică față de diagonala principală 1p
 b) IEPURE este elementul neutru pentru legea \heartsuit (în tabla operației, linia și coloana acestui element coincid cu linia, respectiv coloana de bordare 1p
 c) Se observă că $LEU^5 = IEPURE$ (element neutru) 1p
 $LEU^{2012} = LEU^2 = LEU \heartsuit LEU = TIGRU$ 1p
 d) Compunem la stânga cu LUP și la dreapta cu URS; obținem unica soluție $x = TIGRU$ 2p

2. Calculați $\int_0^2 \max\{\ln(1+x^2); 1\} dx$.

Soluție:

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x^2) - 1$. Deoarece $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \geq 0, \forall x \in [0, \infty)$, rezultă că f este funcție crescătoare pe $[0, \infty)$ 1p
 Deoarece $f(0) = -1$ și $f(\sqrt{e-1}) = 0$, deducem că

$$\max\{\ln(1+x^2), 1\} = \begin{cases} 1, & \text{pentru } x \in [0, \sqrt{e-1}] \\ \ln(1+x^2), & \text{pentru } x \in [\sqrt{e-1}, 2] \end{cases} \dots\dots\dots 2p$$



**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"**

ETAPA NAȚIONALĂ – 20 aprilie 2011

Profil real, specializarea științele naturii

$$\int_0^2 \max\{\ln(1+x^2), 1\} dx = \int_0^{\sqrt{e-1}} 1 dx + \int_{\sqrt{e-1}}^2 \ln(1+x^2) dx = \dots\dots\dots 1p$$

$$= 2\ln 5 - 4 + 2\arctg 2 + 2\sqrt{e-1} - 2\arctg \sqrt{e-1} \dots\dots\dots 3p$$

3. Se consideră funcțiile $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = 1 + x^{n^2-1} + x^{n^2+2n}$, unde $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Notăm cu σ_n aria subgraficului funcției f_n .

a) Arătați că $\sqrt{\sigma_n} = \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n}, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

b) Demonstrați că $2012,2012 < \sqrt{\sigma_2} + \sqrt{\sigma_3} + \dots + \sqrt{\sigma_{2013}} < 2013$.

Lucian-Georges Lăducă

Soluție:

a) $\sigma_n = \int_0^1 (1 + x^{n^2-1} + x^{n^2+2n}) dx = \left(x + \frac{x^{n^2}}{n^2} + \frac{x^{n^2+2n+1}}{n^2 + 2n + 1} \right) \Big|_0^1 \dots\dots\dots 1p$

$$= 1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n^2 + n + 1)^2}{n^2(n+1)^2} \dots\dots\dots 1p$$

$$\sqrt{\sigma_n} = \frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)} = \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n} \dots\dots\dots 1p$$

b) $\sqrt{\sigma_n} = 1 + \frac{1}{n^2 + n} = 1 + \frac{1}{n(n+1)} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \dots\dots\dots 2p$

$$\sqrt{\sigma_2} + \sqrt{\sigma_3} + \dots + \sqrt{\sigma_{2013}} = 2013 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2014} < 2013 \dots\dots\dots 1p$$

$$\sqrt{\sigma_2} + \sqrt{\sigma_3} + \dots + \sqrt{\sigma_{2013}} = 2013 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2014} > 2012,2012 \dots\dots\dots 1p$$

4. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ și polinomul $f = X^n - 2nX^{n-1} + (2n^2 - 4)X^{n-2} + a_3X^{n-3} + \dots + a_n \in \mathbb{C}[X]$, având rădăcinile complexe x_1, x_2, \dots, x_n .

a) Calculați $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 - n \cdot (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$.

b) Arătați că f are toate rădăcinile reale dacă și numai dacă $n = 2$.

Florin Stănescu

Soluție:

a) Folosind primele două relații Vieté, obținem că:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 - n \cdot (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) = 4n^2 - n[4n^2 - 2(2n^2 - 4)] = 4n^2 - 8n \dots\dots\dots 3p$$

b) Dacă toate rădăcinile sunt reale, folosind inegalitatea Cauchy-Schwarz rezultă că $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 - n \cdot (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \leq 0$. Ținând seama de punctul a), deducem că $n \leq 2$, prin urmare $n = 2$ 2p

Reciproc, dacă $n = 2$, atunci $f = X^2 - 4X + 4$, polinom care are ambele rădăcini reale. 2p

