CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 20 aprilie 2011
Profil real, specializarea ştiințele naturii

Clasa a IX-a

1. Fie $a, b, c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $a + b + c = \frac{\pi}{2}$. Demonstrați că

$$\mathrm{tg}a \cdot \mathrm{tg}b + \mathrm{tg}b \cdot \mathrm{tg}c + \mathrm{tg}c \cdot \mathrm{tg}a = 1.$$

2. În urma unui accident la o fabrică de produse petrochimice, o cantitate de 2 tone de nitrați a fost deversată într-un râu din apropiere. Concentrația de nitrați maxim admisă este de 0,05 mg / **l**, iar cea măsurată în urma accidentului este de 250 mg / **l**. Măsurile luate pentru remedierea situației fac aşa încât, în fiecare zi de la contaminare, concentrația de nitrați în zona respectivă să scadă la jumătate față de ziua precedentă.

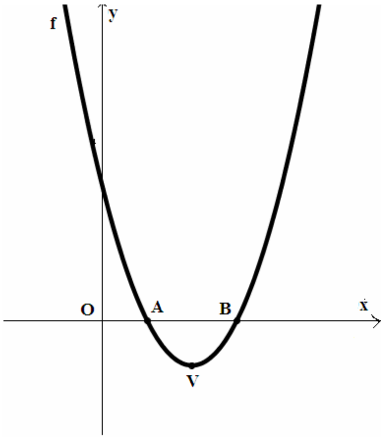
a) În câte zile concentrația de nitrați scade sub concentrația maximă admisă?

b) Ştiind că 10% din viața activă a zonei moare zilnic din cauza poluării, aflați ce procent din populația inițială mai este în viață în ziua în care concentrația de nitrați reintră în limite normale.

3. O funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, cu $a, b, c \in \mathbb{Z}$, are reprezentarea geometrică a graficului ca în figura alăturată.

a) Arătați că, dacă $a \cdot c \geq 4$, atunci $|b| \geq 5$.

b) Determinați numărul a în cazul în care coordonatele punctelor A şi B sunt A(1, 0), respectiv B(3, 0), iar triunghiul AVB are aria egală cu 1.



4. Numim *placă* un triunghi dreptunghic, împreună cu interiorul său.

Dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, arătați că interiorul oricărui patrulater convex poate fi acoperit complet cu n *plăci* care nu se supapun (au interioarele disjuncte).

Recreații Matematice

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 20 aprilie 2011
Profil real, specializarea științele naturii

Clasa a X-a

1. Un grup de patru tineri se numeşte *frumos* dacă din grup face parte cel puțin o fată. Stabiliți câte grupuri *frumoase* se pot forma din echipa de dans sportiv a unui liceu, alcătuită din Alina, Bogdan, Cristina, Daniel, Elena, Florin, Gabriela şi Horațiu.

2. În plan, considerăm mulțimea $\mathcal{P}$ a tuturor punctelor cu ambele coordonate întregi, precum şi mulțimea $\mathcal{D}$ a tuturor dreptelor care trec prin cel puțin două puncte din $\mathcal{P}$.
a) Arătați că prima bisectoare (dreapta de ecuație y = x) aparține mulțimii $\mathcal{D}$.
b) Arătați că orice dreaptă din mulțimea $\mathcal{D}$ conține cel puțin 3 puncte din mulțimea $\mathcal{P}$.
c) Arătați că nu există nicio dreaptă oblică *d* în mulțimea $\mathcal{D}$ astfel încât $A(1,\sqrt{2012}) \in d$.

3. Smaranda alege atent un număr natural a, apoi Nicu alege la întâmplare un număr real strict pozitiv x. Dacă unul dintre numerele $A = 10 - \log_2(x^2)$ sau $B = \log_2(16x)$ este cel puțin egal cu a, atunci Nicu îi va face Smarandei un cadou în valoare de 3^a lei.
Ce număr trebuie să aleagă Smaranda pentru a fi sigură că va primi un cadou cât mai valoros?

4. Fie $u = 2012^{3n}$ şi $v = 2012^{2n} \cdot 2011^n + 2012^n \cdot 2011^{2n} + 2 \cdot 2011^{3n}$, $n \in \mathbb{N}$.
a) Arătați că există valori ale lui n pentru care $u < v$.
b) Arătați că există valori ale lui n pentru care $u > v$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 20 aprilie 2011
Profil real, specializarea ştiințele naturii

Clasa a XI a

1. Fie $f:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$.

a) Scrieți ecuația dreptei d care este asimptotă oblică la graficul funcției f.
b) Argumentați că funcția f este convexă.
c) Demonstrați că aria suprafeței cuprinsă între dreapta d, graficul funcției d, dreptele x = 1 şi x = 2 este mai mică decât $\dfrac{5}{12}$.

2. a) Arătați că ecuația $x^5 - x = m$ are cel mult trei soluții reale, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$.

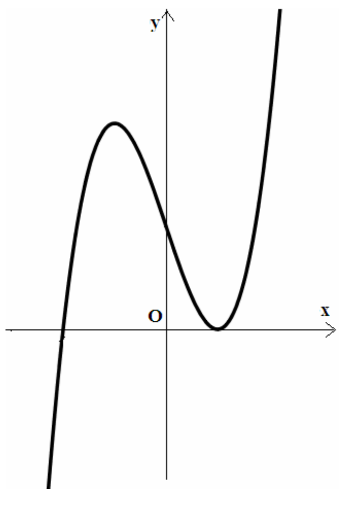
b) Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $a^5 - a = b^5 - b = c^5 - c = d^5 - d$. Demonstrați că determinantul $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$ este nul.

Gazeta Matematică

3. Pentru fiecare număr natural n se consideră matricea $A(n)=\begin{pmatrix} 1 & n & n \\ n & 1 & n \\ n & n & 1 \end{pmatrix}$.

a) Arătați că nu există niciun număr natural n pentru care matricea A(n) să aibă rangul 2.
b) Se numeşte *pas* următoarea modificare a elementelor unei matrice: fiecare element de pe diagonala principală se măreşte sau se micşorează cu 2, iar toate celelalte şase elemente se măresc sau se micşorează cu 1. Stabiliți dacă este posibil ca, plecând de la A(2), după 2012 astfel de *paşi*, determinantul matricei obținute să fie egal cu 2012.

4. O funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^3+bx+c$, are reprezentarea geometrică a graficului ca în figura alăturată. Demonstrați că:
a) $8a+2b+c \ge 0$
b) $abc < 0$.



Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii;*
Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 20 aprilie 2011
Profil real, specializarea științele naturii

Clasa a XII-a

1. Fie mulțimea $\mathcal{A}$ = {LEU, TIGRU, URS, LUP, IEPURE}. Pe $\mathcal{A}$ definim o lege de compoziție asociativă, notată ♥, descrisă mai jos:

♥	LEU	TIGRU	URS	LUP	IEPURE
LEU	TIGRU	URS	LUP	IEPURE	LEU
TIGRU	URS	LUP	IEPURE	LEU	TIGRU
URS	LUP	IEPURE	LEU	TIGRU	URS
LUP	IEPURE	LEU	TIGRU	URS	LUP
IEPURE	LEU	TIGRU	URS	LUP	IEPURE

a) Câte legi de compoziție comutative se pot defini pe $\mathcal{A}$? Se află ♥ printre aceste legi?

b) Legea de compoziție ♥ are element element neutru?

c) Calculați $\text{LEU}^{2012} = \underbrace{\text{LEU}♥\text{LEU}♥\ldots♥\text{LEU}}_{2012}$.

d) Rezolvați ecuația $\text{LEU}♥\, x\, ♥\text{TIGRU} = \text{IEPURE}$, unde necunoscuta este $x \in \mathcal{A}$.

2. Calculați $\int_0^2 \max\left\{\ln\left(1+x^2\right);1\right\} dx$.

3. Se consideră funcțiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}, f_n(x)=1+x^{n^2-1}+x^{n^2+2n}$, unde $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$. Notăm cu σ_n aria subgraficului funcției f_n.

a) Arătați că $\sqrt{\sigma_n}=\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n}, \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.

b) Demonstrați că $2012,2012<\sqrt{\sigma_2}+\sqrt{\sigma_3}+\ldots+\sqrt{\sigma_{2013}}<2013$.

4. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi polinomul $f = X^n - 2nX^{n-1} + \left(2n^2-4\right)X^{n-2} + a_3X^{n-3} + \ldots + a_n \in \mathbb{C}[X]$, având rădăcinile complexe $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

a) Calculați $\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)^2 - n\cdot\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)$.

b) Arătați că f are toate rădăcinile reale dacă şi numai dacă n = 2.

Recreații Matematice

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*