Concursul Naţional de Matematică Aplicată "*Adolf Haimovici*"

Etapa locală - 11 februarie 2012

Clasa a IX-a - profil ştiinţe ale naturii

1. a) Determinaţi cardinalul mulţimii $A=\{x\in\mathbb{Z} \mid |x-1|<7\}$;

b) Determinaţi numărul $a\in\mathbb{N}$ pentru care mulţimea $B=\{y\in\mathbb{Z} \mid |y-5|<a\}$ are exact 13 elemente.

2. a) Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ o progresie aritmetică cu termeni strict pozitivi. Demonstraţi că:

$$a_1+a_2+...+a_n \geq n\sqrt{a_1 a_n}, \quad \forall\ n\in\mathbb{N}^*$$

b) Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ o progresie aritmetică cu termeni strict pozitivi. Dacă $a_1+a_2+...+a_{2012}=2012\sqrt{a_1 a_{2012}}$, determinaţi raţia progresiei.

3. Fie $n\in\mathbb{N}^*$ şi numărul $s(n)=\left[\sqrt{4n^2+1}\right]+\left[\sqrt{4n^2+2}\right]+...+\left[\sqrt{4n^2+12n+7}\right]+\left[\sqrt{4n^2+12n+8}\right]$.

(unde $[y]$ reprezintă partea întreagă a numărului real y)

a) Calculaţi $s(10)$;

b) Demonstraţi că oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$ avem $s(n)\neq 1234$.

(*Supliment Gazeta Matematică nr. 12/2012 – enunţ modificat*)

4. În fiecare dintre cele patru colţuri ale unui teren de fotbal în formă dreptunghiulară de dimensiuni 100m şi 50 m se găseşte câte un om. Undeva pe teren se află un obiect foarte mare, de care fiecare om trage prin intermediul unui cablu legat de acel obiect. Se ştie că oamenii trag de sfoară în acelaşi timp şi cu aceeaşi forţă. Acţiunea comună a celor 4 oameni ar putea avea ca efect deplasarea obiectului cu 0,3 m în fiecare minut.

a) Să se demonstreze că dacă obiectul este poziţionat în centrul terenului el nu se mişcă deloc.

b) Dacă obiectul este poziţionat undeva la 15 m de centru terenului să se determine poziţia obiectului pe teren după 51 minute.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 10 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Concursul Naţional de Matematică Aplicată "*Adolf Haimovici*"

Etapa locală - 11 februarie 2012

Clasa a X-a - profil ştiinţe ale naturii

1. a) Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia: $4^x - 2^x - 56 = 0$;

b) Demonstraţi că $\log_3 28 > \sqrt{8}$.

2. O planetă acoperită în întregime de apă descrie o rotaţie completă în jurul unei stele în 360 zile. Temperatura media a apei de pe planetă, exprimată în grade Celsius se poate calcula cu formula $T(n) = \frac{100}{3} + \frac{200 \sin n^\circ}{3}$, unde $n \in \{1,2,3,...,359,360\}$ şi reprezintă numărul zilei.

a) Să se precizeze câte zile dintre cele 360 ale rotaţiei planeta este îngheţată ?

b) Să se determine temperatura maximă a apei de pe planetă şi să se descrie situaţia planetei în acel moment.

(*Supliment Gazeta Matematică nr. 12/2012*)

3. a) Demonstraţi că $|z-2|^2 + |z+2|^2 - 2|z|^2 = 8$, pentru orice număr complex z.

b) Demonstraţi că $\left(|z-2|^2 - |z|^2 - 4\right)\left(|z+2|^2 - |z|^2 - 4\right) \leq 0$, pentru orice număr complex z.

4. Într-o cameră sunt 16 persoane. Fiecare persoană cunoaşte exact alte trei persoane din acea cameră. Se presupunea că dacă persoana A îl cunoaşte pe B, atunci şi B îl cunoaşte pe A.

a) Dacă se realizează o strângere de mână între fiecare două persoane care se cunosc, să se precizeze câte strângeri de mână au loc;

b) Să se studieze în ce context că putem împărţi cele 16 persoane în grupe de câte 4, astfel încât în interiorul fiecărei grupe, oricare două persoane să nu se cunoască între ele.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 10 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Str. Gh. Bariţiu nr. 2, 330065 - DEVA,
jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro

Concursul Naţional de Matematică Aplicată "*Adolf Haimovici*"
Etapa locală - 11 februarie 2012

Clasa a XI-a - profil ştiinţe ale naturii

1. **a)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^x-2}{\ln(3x-2)}$; **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+5}+x\right)$.

2. **a)** Demonstraţi că $\det(A^2)=\left(\det(A)\right)^2$, pentru orice $A\in M_2(\mathbb{R})$;

b) Să se demonstreze că nu există nici o matrice $X\in M_2(\mathbb{R})$ pentru care $X^2=C$, unde $C=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$.

3. Despre o funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spunem că este **limitată** în raport cu funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dacă există un număr real nenul α astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-\alpha g(x)\right)$ să fie finită.

a) Să se arate că dacă o funcţie f este **limitată** în raport cu funcţia g atunci şi funcţia g este **limitată** în raport cu funcţia f;

b) Să se arate că dacă funcţia f este **limitată** în raport cu funcţia g şi funcţia g este **limitată** în raport cu funcţia h atunci şi funcţia f este **limitată** în raport cu funcţia h;

(*Supliment Gazeta Matematică nr. 12/2012 – enunţ modificat*)

4. Dragoş şi Şerban joacă următorul joc. Aleg o matrice de ordinul doi cu coeficienţi numere întregi. Dragoş adaugă 1 la toate elementele matricei şi apoi îi calculează determinantul. La noua matrice, Şerban scade 2 din toate elementele şi apoi calculează determinantul. Apoi din nou e rândul lui Dragoş care adaugă 3 la toate elementele şi calculează determinantul. Apoi revine Şerban care scade 4 din toate elementele şi calculează determinantul şi aşa mai departe. Jocul se opreşte când determinatul astfel obţinut este mai mic sau egal cu 0.

a) Demonstraţi că dacă se porneşte de la matricea $A=\begin{pmatrix}5&7\\1&3\end{pmatrix}$, jocul nu se termină niciodată;

b) După câte astfel de mutări se termină jocul dacă se porneşte de la matricea $A=\begin{pmatrix}15&4\\5&8\end{pmatrix}$?

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 10 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Concursul Naţional de Matematică Aplicată "*Adolf Haimovici*"

Etapa locală - 11 februarie 2012

Clasa a XII-a - profil ştiinţe ale naturii

1. Pe mulţimea $M_2(\mathbb{Z})$ definim operaţia „$*$" prin $A*B = AB + BA$, pentru orice $A,B \in M_2(\mathbb{Z})$.

a) Demonstraţi că operaţia este comutativă, dar nu este asociativă;

b) Demonstraţi că nu există matricele $A,B \in M_2(\mathbb{Z})$ pentru care $A*B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Pe $\mathbb{R}$ considerăm legea „$\otimes$" definită prin $x \otimes y = xy - 2x - 2y + 6$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Determinaţi numerele $a,b \in \mathbb{R}^*$ pentru care funcţia $F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = ax + b$ verifică relaţia $F(x \otimes y) = F(x) \cdot F(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$;

b) Să se calculeze $1 \otimes 2 \otimes 3 \otimes ... \otimes 10$.

3. a) Determinaţi mulţimea primitivelor funcţiei $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x(1+x)}$.

b) Determinaţi mulţimea primitivelor funcţiei $g:(0,+\infty) \to \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{1}{x(1+x^8)}$.

(*Supliment Gazeta Matematică nr. 12/2012 – enunţ modificat*)

4. La marginea unui oraş a fost construită o pistă pentru curse în lungime de 4 km. Iluminarea pistei se realizează cu un far situat pe aceeaşi direcţie cu pista, situat la 1 km înaintea liniei de start. Luminozitatea într-un punct al pistei poate fi calculată cu formula

$$I(x) = -27 + 180x - 138x^2 + 36x^3 - 3x^4,$$

unde x reprezintă distanţa în kilometri de la un punct de pe pistă la far.

a) Demonstraţi că $I'(x) = 12(5-x)(3-x)(1-x)$;

b) Demonstraţi că punctul de start şi cel de sosire sunt cele mai luminate de pe pistă şi sunt la fel iluminate;

c) Demonstraţi că în punctul de pe pistă cu iluminarea cea mai slabă, luminozitatea este practic nulă.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 10 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Str. Gh. Bariţiu nr. 2, 330065 - DEVA,
jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro