Asociațiunea ASTRA – 150 de ani de la înființare (1861-2011)

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „GHEORGHE LAZĂR”
Ediția a XIII-a, 23-25 martie 2012
SIBIU

Clasa a IX-a

1. Să se determine funcţiile $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ pentru care $g(0) = 0$ şi

$$mf(m) + 2f(mn) + nf(n) = (m+n)g(m+n), \quad \text{oricare ar fi } m, n \in \mathbb{Z}.$$

Florin Stănescu, Găeşti, GM 1/2012, 26552

2. a) Să se determine cel mai mare număr de forma $4^a \cdot 6^b \cdot 9^c$ când a, b, c sunt numere naturale astfel încât $4a + 6b + 9c = 2012$.

b) Să se determine cel mai mare număr ce poate fi scris ca un produs de numere naturale compuse a căror sumă este 2012.

Dumitru Barac, Sibiu

3. Se consideră un triunghi oarecare ABC, o secantă care taie segmentele (AB) şi (AC) în M, respectiv N, şi un punct P situat pe segmentul MN. Ştiind că $\frac{AN}{NC} = \frac{3}{2}$ şi că $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \frac{5}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$, să se determine valoarea raportului $\frac{AM}{MB}$.

Emil C. Popa, Sibiu

4. Fie P un punct oarecare în interiorul triunghiului ABC. Notăm cu d_a, d_b, d_c distanţele lui P la laturile BC, CA, AB ale triunghiului şi cu h_a, h_b, h_c înălţimile triunghiului corespunzătoare acestor laturi. Să se arate că:

a) $\frac{d_a d_b h_c}{h_a h_b d_c} + \frac{d_a h_b d_c}{h_a d_b h_c} + \frac{h_a d_b d_c}{d_a h_b h_c} \geq 1$,

b) $\left(1 + \frac{d_a h_b h_c}{h_a d_b d_c}\right)\left(1 + \frac{h_a d_b h_c}{d_a h_b d_c}\right)\left(1 + \frac{h_a h_b d_c}{d_a d_b h_c}\right) \geq 64\sqrt{\frac{d_a d_b d_c}{h_a h_b h_c}}$, precizând, de fiecare dată, poziţia lui P pentru care este indeplinită egalitatea.

Petru Vlad, Sibiu

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru: 3 ore.

CLASA A IX-A
BAREM DE CORECTARE

1. Să se determine funcţiile $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ pentru care $g(0) = 0$ şi

$$mf(m) + 2f(mn) + nf(n) = (m+n)g(m+n), \quad \text{oricare ar fi } m, n \in \mathbb{Z}.$$

Florin Stănescu, Găeşti, GM 1/2012, 26552

Soluţie. Particularizând $m = n = 0$, rezultă $f(0) = 0$ **1p**

Particularizând $n = 0$, rezultă $f = g$ **1p**

Particularizând $m = 1$, obţinem

(1) $f(1) + (n+2)f(n) = (n+1)f(n+1), \forall n \in \mathbb{Z}$ **1p**

Formulăm $P(n) : f(n) = nf(1)$, $n \in \mathbb{N}$. Folosind inducţia matematică şi (1),

rezultă că $P(n)$ este adevărată, $\forall n \in \mathbb{N}$ **2p**

Particularizând $n = -1$ în (1), rezultă $f(-1) = -f(1)$.

În relaţia din enunţ luăm $m = -1$, deci

$-f(-1) + 2f(-n) + nf(n) = (n-1)f(n-1)$. Pentru $n \in \mathbb{N}$ rezultă

$f(1) + 2f(-n) + n^2 f(1) = (n-1)^2 f(1)$, deci $f(-n) = (-n)f(1)$.

Funcţiile cerute sunt $f(x) = g(x) = ax$, $a = f(1) \in \mathbb{R}$ arbitrar, care verifică **2p**

Total **7p**

2. a) Să se determine cel mai mare număr de forma $4^a \cdot 6^b \cdot 9^c$ când a, b, c sunt numere naturale astfel încât $4a + 6b + 9c = 2012$.

b) Să se determine cel mai mare număr ce poate fi scris ca un produs de numere naturale compuse a căror sumă este 2012.

Dumitru Barac, Sibiu

Soluţie. a) Notăm $M = \{4^a \cdot 6^b \cdot 9^c | a, b, c \in, 4a + 6b + 9c = 2012\}$
nevidă ($4^{503} \cdot 6^0 \cdot 9^0 \in M$), finită, deci M posedă un element maxim
$4^{a_0} \cdot 6^{b_0} \cdot 9^{c_0}$ **1p**
Cum $4a_0 + 6(b_0 + 3) + 9(c_0 - 2) = 2012$ şi $4^{a_0} \cdot 6^{b_0} \cdot 9^{c_0} < 4^{a_0} \cdot 6^{b_0+3} \cdot 9^{c_0-2}$
(căci $6 \cdot 3 = 9 \cdot 2$ şi $9^2 = 81 < 6^3 = 216$), rezultă că $c_0 \leq 1$.
Deoarece c_0 este par, rezultă $c_0 = 0$ **1p**
Rezultă că $4a_0 + 6b_0 = 2012$. Cum $4(a_0 + 3) + 6(b_0 - 2) = 2012$ şi
$4^{a_0} \cdot 6^{b_0} < 4^{a_0+3} \cdot 6^{b_0-2}$ (căci $4 \cdot 3 = 6 \cdot 2$ şi $6^2 = 36 < 4^3 = 64$),
rezultă că $b_0 \leq 1$. Cum b_0 este par, rezultă că $b_0 = 0$ **1p**
când $a_0 = 503$ şi numărul maxim cerut este $4^{503} = 2^{1006}$ **1p**
b) Un factor m par, $m \geq 8$, al numărului care se cere determinat,
poate fi înlocuit cu doi factori 4 şi $m - 4$ (sunt numere compuse,
al doilea este par ≥ 4) şi $4(m - 4) > m \Leftrightarrow 3m > 16$, adevărat **1p**
Un factor m impar, $m \geq 15$, al numărului care se cere determinat,
poate fi înlocuit cu doi factori 9 şi $m - 9$ (sunt numere compuse,
al doilea este par ≥ 4) şi $9(m - 9) > m \Leftrightarrow 8m > 81$, adevărat **1p**
Rezultă că numărul cerut va conţine numai factorii 4, 6 şi 9.
Notând a =numărul factorilor 4, b = numărul factorilor 6,
c =numărul factorilor 9, trebuie rezolvată problema de la punctul anterior
şi numărul cerut este 2^{1006} **1p**
Total **7p**

3. Se consideră un triunghi oarecare ABC, o secantă care taie segmentele (AB) şi (AC) în M, respectiv N, şi un punct P situat pe segmentul MN. Ştiind că $\dfrac{AN}{NC} = \dfrac{3}{2}$ şi că $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \dfrac{5}{9}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{5}\overrightarrow{AC}$, să se determine valoarea raportului $\dfrac{AM}{MB}$.

Emil C. Popa, Sibiu

Soluţie. Notăm $\dfrac{AM}{MB} = x$, deci $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{x}{x+1}$, $\overrightarrow{AB} = \dfrac{x+1}{x}\overrightarrow{AM}$.

Din $\dfrac{AN}{NC} = \dfrac{3}{2}$ rezultă $\overrightarrow{AC} = \dfrac{5}{3}\overrightarrow{AN}$ **2p**

Ţinând seamă că $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}$ şi înlocuind în enunţ,

obţinem: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP} = \dfrac{5}{9}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{5}\overrightarrow{AC} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{AP} = \dfrac{4}{9}\overrightarrow{AB} + \dfrac{4}{5}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AP} = \dfrac{2(x+1)}{9x}\overrightarrow{AM} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AN}$ **3p**

Deoarece punctele M, P şi N sunt coliniare, avem $\dfrac{2(x+1)}{9x} + \dfrac{2}{3} = 1$,

de unde $x = 2$, adică $\dfrac{AM}{MB} = 2$ **2p**

Total **7p**

4. Fie P un punct oarecare în interiorul triunghiului ABC. Notăm cu d_a, d_b, d_c distanţele lui P la laturile BC, CA, AB ale triunghiului şi cu h_a, h_b, h_c înălţimile triunghiului corespunzătoare acestor laturi. Să se arate că:

a) $\dfrac{d_a d_b h_c}{h_a h_b d_c} + \dfrac{d_a h_b d_c}{h_a d_b h_c} + \dfrac{h_a d_b d_c}{d_a h_b h_c} \geq 1$,

b) $\left(1 + \dfrac{d_a h_b h_c}{h_a d_b d_c}\right)\left(1 + \dfrac{h_a d_b h_c}{d_a h_b d_c}\right)\left(1 + \dfrac{h_a h_b d_c}{d_a d_b h_c}\right) \geq 64\sqrt{\dfrac{d_a d_b d_c}{h_a h_b h_c}}$,

precizând, de fiecare dată, poziţia lui P pentru care este indeplinită egalitatea.

Petru Vlad, Sibiu

Soluţie. Notăm $x = \dfrac{d_a}{h_a} = \dfrac{BC \cdot d_a}{BC \cdot h_a} = \dfrac{S_{PBC}}{S_{ABC}} > 0$ şi analoagele. Cum $S_{PBC} + S_{PCA} + S_{PAB} = S_{ABC}$, rezultă că $x + y + z = 1$ **1p**

a) Inegalitatea de demonstrat se scrie: $\dfrac{xy}{z} + \dfrac{zx}{y} + \dfrac{yz}{x} \geq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq xyz = xyz(x+y+z) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (xy - yz)^2 + (yz - zx)^2 + (zx - xy)^2 \geq 0$, adevărat,

cu egalitate $\Leftrightarrow x = y = z = \dfrac{1}{3}$ **2p**

b) Folosind inegalitatea mediilor, avem: $\prod\left(1 + \dfrac{d_a h_b h_c}{h_a d_b d_c}\right) = \prod\left(1 + \dfrac{x}{yz}\right) =$

$= \prod\left(x + y + z + \dfrac{x}{yz}\right) \geq \prod 4\sqrt[4]{xyz \cdot \dfrac{x}{yz}} = 64\sqrt[4]{x^2y^2z^2} =$

$= 64\sqrt{xyz} = 64\sqrt{\dfrac{d_a d_b d_c}{h_a h_b h_c}}$, cu egalitate $\Leftrightarrow x = y = z = \dfrac{1}{3}$ **3p**

Dacă $x = \dfrac{d_a}{h_a} = \dfrac{1}{3}$, rezultă că P se află pe paralela la BC care trece prin centrul de greutate. De fiecare dată egalitatea se obţine dacă şi numai dacă P este centrul de greutate al triunghiului **1p**

Total **7p**