Asociațiunea ASTRA – 150 de ani de la înființare (1861-2011)

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „GHEORGHE LAZĂR”
Ediția a XIII-a, 23-25 martie 2012
SIBIU

Clasa a VII-a

1. a) Arătaţi că, pentru orice numere x, y pozitive, nenule este adevărată inegalitatea:

$$\frac{2}{x+y} - \frac{1}{xy} < 1.$$

b) Demomstraţi că, pentru orice numere reale a, b, c pozitive, nenule pentru care $a+b+c=1$, este adevărată inegalitatea:

$$\frac{1+a}{b+c} + \frac{1+b}{c+a} + \frac{1+c}{a+b} < \frac{1}{abc}.$$

2. Există $a \in \mathbb{N}^*$ aşa încât numărul $a^{2n} + 2a^{2n-1} + a^{2n-2} + 3a^n + 3a^{n-1} + 2$ să fie pătrat perfect?

3. Fie CD înălţime în triunghiul ascuţitunghic ABC cu $m(\widehat{BAC}) = 60°$. Dacă P este un punct de pe segmentul CD astfel ca $BC = AP\sqrt{3}$, atunci P este ortocentrul triunghiului ABC.

4. Fie ABC un triunghi oarecare ascuţitunghic şi punctele $D \in (BC), E \in (AC)$ astfel încât $\frac{BD}{DC} = \frac{2}{3}$ şi $\frac{EC}{EA} = \frac{1}{2}$. Notăm cu $\{M\} = BE \cap AD$.
a) Arătaţi că dacă P este mijlocul segmentului (AB), atunci $MP || AC$.
b) Calculaţi raportul ariilor triunghiurilor APM şi ABC.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 3 ore.

CLASA VII-a
BAREM DE CORECTARE

1. a) Arătaţi că, pentru orice numere x, y pozitive, nenule este adevărată inegalitatea:

$$\frac{2}{x+y} - \frac{1}{xy} < 1.$$

b) Demomstraţi că, pentru orice numere reale a, b, c pozitive, nenule pentru care $a+b+c=1$, este adevărată inegalitatea:

$$\frac{1+a}{b+c} + \frac{1+b}{c+a} + \frac{1+c}{a+b} < \frac{1}{abc}.$$

E:14278/G.M.12/2011,
Adriana Dragomir, Oţelul Roşu

Soluţie a) Inegalitatea este echivalentă cu

$2xy - (x+y) < xy(x+y)$ **1p**

sau $(x+y)(xy+1) > 2xy$ **1p**

Utilizând inegalitatea mediilor avem

$(x+y)(xy+1) \geq 2\sqrt{xy} \cdot 2\sqrt{xy} = 4xy > 2xy$ **1p**

b) Avem $1+a = 2-(b+c) \Rightarrow \dfrac{1+a}{b+c} = \dfrac{2}{b+c} - 1$ **1p**

Deci: $\dfrac{1+a}{b+c} + \dfrac{1+b}{c+a} + \dfrac{1+c}{a+b} = \dfrac{2}{a+b} + \dfrac{2}{b+c} + \dfrac{2}{c+a} - 3$ **1p**

Ţinând cont de inegalitatea de la punctul a) avem:

$\dfrac{2}{a+b} + \dfrac{2}{b+c} + \dfrac{2}{c+a} - 3 < \dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ac}$ **1p**

Dar $\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ac} = \dfrac{a+b+c}{abc} = \dfrac{1}{abc}$ **0,5p**

adică $\dfrac{1+a}{b+c} + \dfrac{1+b}{c+a} + \dfrac{1+c}{a+b} < \dfrac{1}{abc}$ **0,5p**

Total **7p**

2. Există $a \in \mathbb{N}^*$ aşa încât numărul $a^{2n} + 2a^{2n-1} + a^{2n-2} + 3a^n + 3a^{n-1} + 2$ să fie pătrat perfect?

Dumitru Acu, Sibiu

Soluţie Pentru $a = 1$ numărul este egal cu 12 care nu este patrat perfect. **1p**

Pentru $a \geq 2$ avem
$a^{2n} + 2a^{2n-1} + a^{2n-2} + 3a^n + 3a^{n-1} + 2 =$

$= a^n(a^n + a^{n-1} + 1) + a^{n-1}(a^n + a^{n-1} + 1) + 2(a^n + a^{n-1} + 1) =$

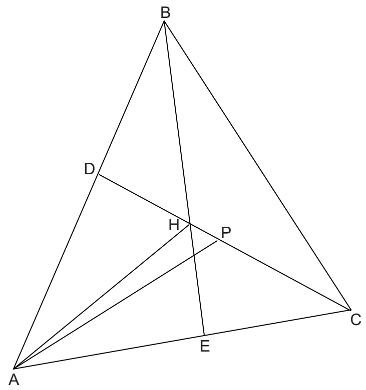
$= (a^n + a^{n-1} + 1)(a^n + a^{n-1} + 2)$ **3p**

care este produsul a două numere naturale consecutive nenule **1p**

Cum produsul a două numere naturale consecutive nenule nu poate fi pătrat perfect deoarece $n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$ **1p**

Rezultă că nu există $a \in \mathbb{N}^*$ şi $n \in \mathbb{N}^*$ aşa încât numărul din enunţ să fie pătrat perfect **1p**

Total **7p**



3. Fie CD înălţime în triunghiul ascuţitunghic ABC cu $m(\widehat{BAC}) = 60°$. Dacă P este un punct de pe segmentul CD astfel ca $BC = AP\sqrt{3}$, atunci P este ortocentrul triunghiului ABC.

Emil C. Popa, Sibiu

Soluţie

Fie BE înălţime şi $\{H\} = BE \cap CD$ ortocentrul triunghiului ABC. **1p**

În triunghiul dreptunghic ACD avem $tg\widehat{CAD} = \dfrac{DC}{AD}$ de unde $\dfrac{DC^2}{AD^2} = 3$ **1p**

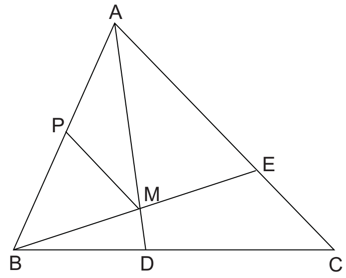
În triunghiul dreptunghic BDH avem $tg\widehat{BHD} = \dfrac{BD}{HD}$ de unde $\dfrac{BD^2}{HD^2} = 3$ **1p**

Deci $3 = \dfrac{DC^2}{AD^2} = \dfrac{BD^2}{HD^2} = \dfrac{DC^2 + BD^2}{AD^2 + HD^2} = \dfrac{BC^2}{AH^2}$ **2p**

În concluzie $AP = AH$, iar $P, H \in (CD)$ care este catetă în triunghiul dreptunghic ACD. **1p**

deci $P \equiv H$ şi P este ortocentrul triunghiului ABC. **1p**

Total **7p**



4. Fie ABC un triunghi oarecare ascuţitunghic şi punctele $D \in (BC), E \in (AC)$ astfel încât $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{2}{3}$ şi $\dfrac{EC}{EA} = \dfrac{1}{2}$. Notăm cu $\{M\} = BE \cap AD$.

a) Arătaţi că dacă P este mijlocul segmentului (AB), atunci $MP||AC$.

b) Calculaţi raportul ariilor triunghiurilor APM şi ABC.

Petrică Dicu, Sibiu

Soluţie

a) Aplicăm teorema lui Menelaus în triunghiul BEC şi transversala A, M, D şi avem

(1) $$\frac{AC}{AE} \cdot \frac{ME}{MB} \cdot \frac{BD}{DC} = 1$$

.... **1p**

Din $\dfrac{EC}{EA} = \dfrac{1}{2}$ obţinem $\dfrac{AC}{AE} = \dfrac{3}{2}$ **0,5p**

Înlocuind în (1) obţinem $\dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{ME}{MB} \cdot \dfrac{2}{3} = 1$ adică $ME = MB$ **0,5p**

Cum $AP = PB$ rezultă că MP este linie mijlocie în triunghiul ABE, deci $MP||AC$. **1p**

b) Fie S_{APM}-aria triunghiului APM. Avem

$S_{APM} = \dfrac{1}{2} S_{ABM}$ **1p**

$S_{ABM} = \dfrac{1}{2} S_{ABE}$ **1p**

$S_{ABE} = \dfrac{2}{3} S_{ABC} (deoarece \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{2}{3})$ **1p**

şi deci $S_{ABM} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} S_{ABC} = \dfrac{1}{6} S_{ABC}$ **0,5p**

adică $\dfrac{S_{ABM}}{S_{ABC}} = \dfrac{1}{6}$ **0,5p**

Total **7p**