Asociațiunea ASTRA – 150 de ani de la înființare (1861-2011)

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „GHEORGHE LAZĂR”

Ediția a XIII-a, 23-25 martie 2012

SIBIU

Clasa a VIII-a

1) Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $(n+1)(x^n + y^n + z^n) \geq n\sqrt{n}(xy + yz + zx)$ pentru orice numere reale x, y, z.

Emil C. Popa, Sibiu

2) Fie $a, b \in (0, \infty)$, $a \geq b$. Demonstraţi că:

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b}\,)^m + (\sqrt{a+1} - \sqrt{b+1}\,)^m + \ldots + (\sqrt{a+n-1} - \sqrt{b+n-1}\,)^m +$$
$$+(\sqrt{a+n-1} + \sqrt{b+n-1}\,)^m + (\sqrt{a+n-2} + \sqrt{b+n-2}\,)^m + \ldots +$$
$$+(\sqrt{a+1} + \sqrt{b+1}\,)^m + (\sqrt{a} + \sqrt{b}\,)^m \geq 2n\sqrt{(a-b)^m},$$

oricare ar fi numerele naturale n şi m, $n \geq 1$.

Dumitru Acu, Sibiu

3) Dacă a, b, c sunt dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic care verifică simultan condiţiile $a(a+1) = b+c$, $b(b+1) = c+a$, $c(c+1) = a+b$, atunci acesta este cub.

Ion Neaţă, Slatina, Olt, E:14262 (GM. 11/2011)

4) Se consideră o piramidă patrulateră regulată având toate muchiile egale cu l în care este înscrisă o prismă patrulateră regulată de volum maxim. Determinaţi volumul prismei.

Nicolae Secelean, Sibiu

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru: 3 ore.

Clasa a VIII-a – barem de corectare

1) Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ astfel ca

$$(n+1)(x^n + y^n + z^n) \geq n\sqrt{n}(xy + yz + zx)$$

pentru orice numere reale x, y, z.

Emil C. Popa, Sibiu

Pentru $x = y = z = 1$ avem $n + 1 \geq n\sqrt{n}$, de unde $\sqrt{n} \leq 1 + \dfrac{1}{n}$.
Aşadar $n = 1$ sau $n = 2$ **3p**

Pentru $n = 1$ inegalitatea devine $2(x + y + z) \geq xy + yz + zx$ care este falsă (luând, de exemplu $x = y = z = 3$) **2p**

Pentru $n = 2$, avem

$$3(x^2 + y^2 + z^2) = x^2 + 2y^2 + y^2 + 2z^2 + z^2 + 2x^2 \geq 2\sqrt{2}(xy + yz + zx)$$

adevărată pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$, cu egalitate pentru $x = y = z = 0$ **2p**

TOTAL **7p**

2) Fie $a, b \in (0, \infty)$, $a \geq b$. Demonstraţi că:

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b}\,)^m + (\sqrt{a+1}-\sqrt{b+1}\,)^m + \ldots + (\sqrt{a+n-1}-\sqrt{b+n-1}\,)^m +$$

$$+(\sqrt{a+n-1}+\sqrt{b+n-1}\,)^m + (\sqrt{a+n-2}+\sqrt{b+n-2}\,)^m + \ldots +$$

$$+(\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}\,)^m + (\sqrt{a}+\sqrt{b}\,)^m \geq 2n\sqrt{(a-b)^m},$$

oricare ar fi numerele naturale n şi m, $n \geq 1$.

Dumitru Acu, Sibiu

Avem $(\sqrt{a+k}-\sqrt{b+k}\,)(\sqrt{a+k}+\sqrt{b+k}\,) = a-b$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, de unde $\sqrt{a+k}-\sqrt{b+k} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a+k}+\sqrt{b+k}}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ **3p**

Deoarece $(\sqrt{a+k}+\sqrt{b+k}\,)^m + \dfrac{(a-b)^m}{(\sqrt{a+k}+\sqrt{b+k}\,)^m} \geq 2\sqrt{(a-b)^m}$ **3p**

rezultă inegalitatea din enunţ **1p**

TOTAL **7p**

3) Dacă a, b, c sunt dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic care verifică simultan condiţiile

$$a(a+1) = b+c,\ b(b+1) = c+a,\ c(c+1) = a+b,$$

atunci acesta este cub.

Ion Neaţă, Slatina, Olt,
E:14262 (GM. 11/2011)

SOLUŢIA I.

Fie $a \leq b \leq c$. Avem:

(1) $a(a+1) = b+c \geq 2a \ \Rightarrow \ a \geq 1$

(2) $c(c+1) = a+b \leq 2c \ \Rightarrow \ c \leq 1$ **3p**

(3) $b(b+1) = c+a \ \Rightarrow \ a(a+1) \leq b(b+1) = c+a \leq a+1 \ \Rightarrow \ a \leq 1$ **2p**

Din (1), (3), (2) rezultă $a = 1$ deci $1 = a \leq b \leq c \leq 1 \ \Rightarrow \ b = c = 1$ **2p**

TOTAL **7p**

SOLUŢIA II.

Adunăm primele condiţii şi obţinem (1) $a^2 + b^2 = 2c$.

În mod analog găsim (2) $b^2 + c^2 = 2a$ şi (3) $c^2 + a^2 = 2b$ **3p**

Scădem (2) din (1) şi obţinem $a^2 - c^2 = -2(a-c)$ sau $(a-c)(a+c+2) = 0$, de unde $a = c$. La fel, din (2) şi (3) obţinem $b = c$, deci paralelipipedul este cub **3p**

Acum, din (1), deducem că $a = 1$ **1p**

TOTAL **7p**

4) Se consideră o piramidă patrulateră regulată având toate muchiile egale cu l în care este înscrisă o prismă patrulateră regulată de volum maxim. Determinaţi volumul prismei.

Nicolae Secelean, Sibiu

Se observa ca poziţia prismei este ca in fig. 1. Figura............................**1**p

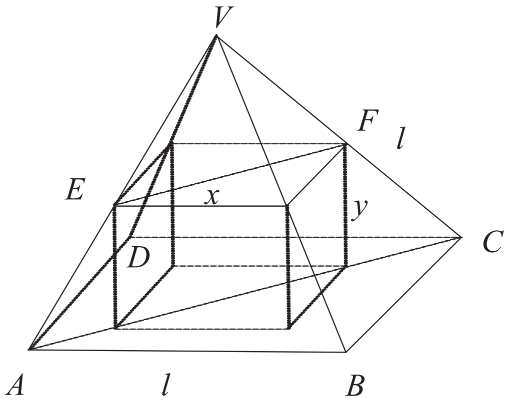

Fig. 1

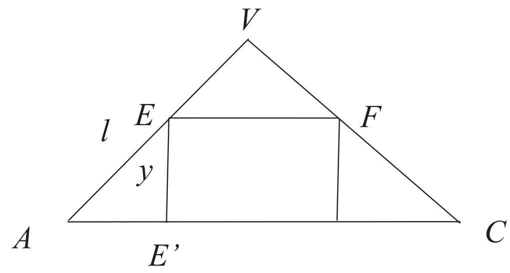

Fig.2

Sectionam piramida cu plan determinat de vârful piramidei şi două vârfuri opuse ale bazei. Obţinem ΔVAC (fig. 2). Notăm x muchia bazei prismei iar cu y muchia laterală. Avem:

ΔVAC dreptunghic isoscel, deci $\Delta AEE'$ isoscel, aşadar $y = AE' = \dfrac{(l-x)\sqrt{2}}{2}$....**1p**

Volumul prismei este maxim când $x^2 y = \dfrac{x^2(l-x)\sqrt{2}}{2}$ este maxim, adică $x^2(l-x)$ este maxim..**2p**

Scriind $4 \cdot \dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{x}{2} \cdot (l-x)$, deducem că maximul se realizează când $\dfrac{x}{2} = l - x$, $x = \dfrac{2l}{3}$ (se foloseşte proprietatea că, dacă suma a trei numere este constantă, atunci produsul lor este maxim dacă şi numai dacă numerele sunt egale sau inegalitatea mediilor).......**2p**

Atunci volumul este $\dfrac{2\sqrt{2}}{27} l^3$..**1p**

TOTAL **7p**