Asociaţiunea ASTRA – 150 de ani de la înfiinţare (1861-2011)

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ „GHEORGHE LAZĂR”

Ediţia a XIII-a, 23-25 martie 2012

SIBIU

Clasa a X-a

1. Fie $a, b, c \in (0, 1)$; arătati că

$$log_a \frac{3bc}{a+b+c} + log_b \frac{3ca}{a+b+c} + log_c \frac{3ab}{a+b+c} \geq 3.$$

Precizaţi cazul de egalitate.

Dumitru Acu, Sibiu

2. Fie $a > 0$. Să se arate că:

a) dacă $x, y, z \in \mathbb{R}$ cu $x + y + z = 0$, atunci

$$a^x + \sqrt{a^y} + \sqrt[3]{a^z} > \sqrt{6},$$

b) dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ cu $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$, atunci

$$a^{x_1} + \sqrt{a^{x_2}} + \sqrt[3]{a^{x_3}} + \cdots + \sqrt[n]{a^{x_n}} \geq \frac{n(n+1)}{2}(n!)^{-\frac{2}{n+1}}$$

oricare ar fi $n \in N^*$.

Emil C. Popa, Sibiu

3. Să se rezolve

$$\begin{cases} \log_5(x+1) = \log_3(7-y) \\ \log_5(y+1) = \log_3(7-z) \\ \log_5(z+1) = \log_3(7-x) \end{cases}$$

Vlad Petru, Sibiu

4. Să se determine termenul general al şirului $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin $a_0 = 1$ şi $a_n = -\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!}$, $n \geq 1$.

26.557 G.M.1/Seria B/2012,
Antonia Ciocan, Bucureşti

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 3 ore.

CLASA a X-a
BAREM DE CORECTARE

1. Fie $a, b, c \in (0,1)$; arătati că

$$log_a \frac{3bc}{a+b+c} + log_b \frac{3ca}{a+b+c} + log_c \frac{3ab}{a+b+c} \geq 3.$$

Precizaţi cazul de egalitate.

Dumitru Acu, Sibiu

Soluţie. Avem

$E = log_a \frac{3bc}{a+b+c} + log_b \frac{3ca}{a+b+c} + log_c \frac{3ab}{a+b+c}$

$= log_a \frac{3abc}{a+b+c} + log_b \frac{3abc}{a+b+c} + log_c \frac{3abc}{a+b+c} - 3.$ .... **1 p**

Din inegalitatea mediilor avem $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ şi putem scrie

$E \geq log_a(abc)^{\frac{2}{3}} + log_b(abc)^{\frac{2}{3}} + log_c(abc)^{\frac{2}{3}} - 3$ .... **2 p**

$= \frac{2}{3}\left[1 + log_a b + log_a c + 1 + log_b a + log_b c + 1 + log_c a + log_c b\right] - 3$

$= \frac{2}{3}\left[3 + \left(log_a b + \frac{1}{log_a b}\right) + \left(log_a c + \frac{1}{log_a c}\right) + \left(log_b c + \frac{1}{log_b c}\right)\right] - 3$ .... **2 p**

$\geq \frac{2}{3}\left[3+2+2+2\right] - 3 = 3.$ .... **1 p**

Egalitatea are loc pentru $a = b = c$. .... **1 p**

TOTAL .... **7 p**

2. Fie $a > 0$. Să se arate că:

a) dacă $x, y, z \in \mathbb{R}$ cu $x + y + z = 0$, atunci

$$a^x + \sqrt{a^y} + \sqrt[3]{a^z} > \sqrt{6},$$

b) dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ cu $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$, atunci

$$a^{x_1} + \sqrt{a^{x_2}} + \sqrt[3]{a^{x_3}} + \cdots + \sqrt[n]{a^{x_n}} \geq \frac{n(n+1)}{2}(n!)^{-\frac{2}{n+1}}$$

oricare ar fi $n \in N^*$.

Emil C. Popa, Sibiu

Soluţie. Folosim inegalitatea mediilor.

a) $a^x + \sqrt{a^y} + \sqrt[3]{a^z} = a^x + \left(\frac{\sqrt{a^y}}{2} + \frac{\sqrt{a^y}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt[3]{a^z}}{3} + \frac{\sqrt[3]{a^z}}{3} + \frac{\sqrt[3]{a^z}}{3}\right)$ .... **2 p**

$\geq 6\sqrt[6]{\frac{a^x \cdot a^y \cdot a^z}{2^2 \cdot 3^3}} = \sqrt[6]{\frac{2^6 \cdot 3^6}{2^2 \cdot 3^3}} = \sqrt[6]{2} \cdot \sqrt{6} > \sqrt{6}.$ .... **1 p**

b) $a^{x_1} + \left(\frac{\sqrt{a^{x_2}}}{2} + \frac{\sqrt{a^{x_2}}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt[3]{a^{x_3}}}{3} + \frac{\sqrt[3]{a^{x_3}}}{3} + \frac{\sqrt[3]{a^{x_3}}}{3}\right) + \cdots$

$+ \left(\frac{\sqrt[n]{a^{x_n}}}{n} + \frac{\sqrt[n]{a^{x_n}}}{n} + \cdots + \frac{\sqrt[n]{a^{x_n}}}{n}\right)$ .... **2 p**

$\geq \frac{n(n+1)}{2} \sqrt[\frac{n(n+1)}{2}]{\frac{a^{x_1} \cdot a^{x_2} \cdot \ldots \cdot a^{x_n}}{1^1 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot n^n}}$ .... **1 p**

$\geq \frac{n(n+1)}{2} \sqrt[\frac{n(n+1)}{2}]{\frac{1}{(n!)^n}} = \frac{n(n+1)}{2}(n!)^{-\frac{2}{n+1}}.$ .... **1 p**

TOTAL .... **7 p**

3. Să se rezolve

$$\begin{cases} \log_5(x+1) = \log_3(7-y) \\ \log_5(y+1) = \log_3(7-z) \\ \log_5(z+1) = \log_3(7-x) \end{cases}$$

Vlad Petru, Sibiu

Soluţie. Avem $x, y, z \in (-1, 7)$. .... **1 p**

Soluţia sistemului este $x = y = z = 4$. .... **1 p**

Presupunem $x > 4 \Rightarrow \log_5(x+1) = \log_3(7-y) > 1 \Rightarrow 7 - y > 3 \Rightarrow y < 4$ .... **1 p**

$\Rightarrow \log_5(y+1) = \log_3(7-z) < 1 \Rightarrow 7 - z < 3 \Rightarrow z > 4$ .... **1 p**

$\Rightarrow \log_5(z+1) = \log_3(7-x) > 1 \Rightarrow 7 - x > 3 \Rightarrow x < 4$ (contradicţie). .... **1 p**

Analog dacă presupunem $x < 4 \Rightarrow x > 4$. .... **1 p**

Deci $x = 4$ de unde $y = z = 4$. .... **1 p**

TOTAL .... **7 p**

4. Să se determine termenul general al şirului $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin $a_0 = 1$ şi $a_n = -\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!}$, $n \geq 1$.

26.557 G.M.1/Seria B/2012,
Antonia Ciocan, Bucureşti

Soluţie. Folosim inducţia matematică. Pentru $n = 1$ avem $a_1 = -\frac{1}{1!} = \frac{(-1)^1}{1!}$; pentru $n = 2$ găsim $a_2 = \frac{1}{2!} = \frac{(-1)^2}{2!}$, iar pentru $n = 3$ obţinem $a_3 = -\frac{1}{6} = \frac{(-1)^3}{3!}$. .... **1 p**

Presupunem că $a_k = \frac{(-1)^k}{k!}$, $k \leq n-1$ şi să arătăm că $a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$. .... **1 p**

Avem $a_n = -\left(\frac{a_{n-1}}{1!} + \frac{a_{n-2}}{2!} + \cdots + \frac{a_1}{(n-1)!} + \frac{a_0}{n!}\right)$

$= -\left[\frac{(-1)^{n-1}}{1!(n-1)!} + \frac{(-1)^{n-2}}{2!(n-2)!} + \cdots + \frac{(-1)^1}{(n-1)!1!} + \frac{(-1)^0}{n!0!}\right]$ .... **1 p**

$= \frac{(-1)^n}{n!}\left[C_n^1 - C_n^2 + C_n^3 - \cdots + (-1)^{n-2}C_n^{n-1} + (-1)^{n-1}C_n^n\right]$. .... **2 p**

Din $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^{n-1}x^{n-1} + C_n^n x^n$, pentru $x = -1$, obţinem

$$C_n^1 - C_n^2 + C_n^3 - \cdots + (-1)^{n-1}C_n^n = C_n^0 = 1.$$

Rezultă că $a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$, ceea ce trebuia demonstrat. .... **2 p**

TOTAL .... **7 p**