Asociațiunea ASTRA – 150 de ani de la înființare (1861-2011)

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE LAZĂR"
Ediția a XIII-a, 23-25 martie 2012
SIBIU

Clasa a XI-a

1. Să se arate că $A(A-B)B = B(A-B)A$ pentru orice matrici pătratice de ordin 2 cu urme egale.

26.559-G.M.1/2012
Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

2. Să se studieze convergenţa şirului $(a_n)_n$ ştiind că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem $a_n \in (0,1]$ şi $1 + a_1 + a_2 + ... + a_n = n + a_1 a_2 ... a_n$.

Emil C. Popa, Sibiu

3. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu B ortogonală ($BB^t = I_n$) să se arate că:
a) $[det(AB^{-1})]^2 = det(AA^t)$
b) $[Tr(AB^{-1})]^2 \leq nTr(AA^t)$
unde TrA este urma matricii A (suma elementelor de pe diagonala principală)

Adrian Gârjoabă, Sibiu

4. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 0}$, a_0 dat. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, a \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $\lim\limits_{n\to\infty}(9a_{n+1} - 9a_n + 2a_{n-1}) = 2a$

Dumitru Acu, Sibiu

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 3 ore.

CLASA XI-a
BAREM DE CORECTARE

1. Să se arate că $A(A-B)B = B(A-B)A$ pentru orice matrici pătratice de ordin 2 cu urme egale.

26.559-G.M.1/2012
Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

Soluţie 1. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ cu $a+d = a_1+d_1$ **1p**

$A(A-B)B = \begin{pmatrix} a(a-a_1)+b(c-c_1) & a(b-b_1)+b(d-d_1) \\ c(a-a_1)+d(c-c_1) & c(b-b_1)+d(d-d_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ **1p**

$B(A-B)A = \begin{pmatrix} a_1(a-a_1)+b_1(c-c_1) & a_1(b-b_1)+b_1(d-d_1) \\ c_1(a-a_1)+d_1(c-c_1) & c_1(b-b_1)+d_1(d-d_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ **1p**

$aa_1(a-a_1)+ba_1(c-c_1)+ac_1(b-b_1)+bc_1(d-d_1) =$

$= a_1a(a-a_1)+b_1a(c-c_1)+a_1c(b-b_1)+b_1c(d-d_1)$ **0,25**

$(a-a_1)bc_1+(d-d_1)bc_1 = (a-a_1)b_1c+(d-d_1)b_1c$
$[(a-a_1)+(d-d_1)]bc_1 = [(a-a_1)+(d-d_1)]b_1c$ evident **0,75p**

Analog pentru celelalte 3 egalităţi. .... **3x(0,25p+0,75p)**

Total **7p**

Soluţie 2. Scriem

$A^2-(trA)A+(detA)I_2 = 0$
$B^2-(trB)B+(detB)I_2 = 0$ **2p**

Înmulţim prima relaţie la dreapta cu B şi a doua relaţie la stânga cu A şi obţinem:

$A^2B-(trA)AB+(detA)B = 0$
$AB^2-(trB)AB+(detB)A = 0$

de unde $A^2B-AB^2 = (detB)A-(detA)B$ **2p**

Înmulţim apoi prima relaţie la stânga cu B şi a doua relaţie la dreapta cu A şi găsim:

$BA^2 - (trA)BA + (detA)B = 0$
$B^2A - (trB)BA + (detB)A = 0$

de unde $BA^2 - B^2A = (detB)A - (detA)B$ **2p**

În final $A^2B - AB^2 = BA^2 - B^2A$. **1p**

Total **7p**

2. Să se studieze convergenţa şirului $(a_n)_n$ ştiind că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem $a_n \in (0,1]$ şi $1 + a_1 + a_2 + ... + a_n = n + a_1 a_2 ... a_n$.

Emil C. Popa, Sibiu

Soluţie Pentru $n = 2$ avem $1 + a_1 + a_2 = 2 + a_1 a_2$ sau

$(1 - a_1)(1 - a_2) = 0$ deci $a_1 = 1$ sau $a_2 = 1$ **1p**

Din $(1 - a_1 a_2)(1 - a_3) \geq 0$ avem $a_1 a_2 + a_3 \leq 1 + a_1 a_2 a_3$ **1p**

$a_1 + a_2 + a_3 - 1 = a_1 a_2 + a_3 \leq 1 + a_1 a_2 a_3$

cu egalitate pentru $a_1 a_2 = 1$ sau $a_3 = 1$ **1p**

Din $(1 - a_1 a_1 a_3)(1 - a_4) \geq 0$ obţinem $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - 2 = a_1 a_2 a_3 + a_4 \leq 1 + a_1 a_2 a_3 a_4$ cu egalitate pentru $a_1 a_2 a_3 = 1$ sau $a_4 = 1$ **1p**

Dacă $a_n = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ atunci $(a_n)_n$ convergent **1p**

Dacă există $k \in \mathbb{N}^*$ cu $a_k \in (0,1)$ atunci din
$a_1 a_2 ... a_k \in (0,1)$ şi $a_1 + a_2 + ... + a_k + a_{k+1} - (k-1) =$
$= a_1 a_2 ... a_k + a_{k+1} \leq 1 + a_1 a_2 ... a_k a_{k+1}$ rezultă $a_{k+1} = 1$ **1p**

Deci, $a_i = 1$ oricare ar fi $i \geq k + 1$ deci $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$ **1p**

Total **7p**

Alte variante se punctează corespunzător. De exemplu

$1 + a_1 + ... + a_n = n + a_1 a_2 ... a_n$
$1 + a_1 + ... + a_n + a_{n+1} = n + 1 + a_1 a_2 ... a_n a_{n+1}$. Se scad relaţiile
$a_{n+1} - 1 = a_1 ... a_n (a_{n+1} - 1)$ sau $(a_{n+1} - 1)(1 - a_1 ... a_n) = 0 \Rightarrow a_{n+1} = 1$ sau $a_1 ... a_n = 1$
....

3. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu B ortogonală ($BB^t = I_n$) să se arate că:

a) $[det(AB^{-1})]^2 = det(AA^t)$

b) $[Tr(AB^{-1})]^2 \leq nTr(AA^t)$

unde TrA este urma matricii A (suma elementelor de pe diagonala principală)

Adrian Gârjoabă, Sibiu

Soluţie

B ortogonală $\Rightarrow B^{-1} = B^t$ **0,5p**

B ortogonală $\Rightarrow (detB)^2 = 1$ **0,5p**

$[det(AB^{-1})]^2 = (detA)^2(detB^{-1})^2 = (detA)^2 = det(AA^t)$ **1p**

$Tr(AB^t) = \sum a_{ij}b_{ij}$ **2p**

$Tr(AA^t) = \sum a_{ij}^2$ **0,5p**

$(\sum a_{ij}b_{ij})^2 \leq \sum a_{ij}^2 \sum b_{ij}^2$ ineg CBS **1p**

Inegalitatea CBS se scrie $[Tr(AB^t)]^2 \leq Tr(AA^t)Tr(BB^t)$ **0,5p**

$BB^t = I_n$ şi $TrI_n = n$ **0,5p**

$[Tr(AB^{-1})]^2 = [Tr(AB^t)]^2 \leq Tr(AA^t)Tr(I_n) = nTr(AA^t)$ **0,5p**

Total **7p**

4. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 0}$, a_0 dat. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, a \in \mathbb{R}$ daca şi numai dacă $\lim\limits_{n\to\infty}(9a_{n+1} - 9a_n + 2a_{n-1}) = 2a$

Dumitru Acu, Sibiu

Soluţie

Fie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ avem

$\lim\limits_{n\to\infty}(9a_{n+1} - 9a_n + 2a_{n-1}) = 9a - 9a + 2a$ **1,5p**

cu justificare (operaţii cu şiruri convergente) **0,5p**

Enunţarea rezultatului: dacă $|\lambda| < 1$ atunci

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ dacă si numai dacă $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - \lambda a_n) = (1-\lambda)a$ **1p**

$\lim\limits_{n\to\infty}(9a_{n+1} - 9a_n + 2a_{n-1}) = \frac{1}{9}\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n + \frac{2}{9}a_{n-1}) = \frac{2}{9}a$ **1p**

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - \frac{1}{3}a_n - \frac{2}{3}(a_n - \frac{1}{3}a_{n-1}) = \frac{2}{9}a$ **0,5p**

$y_n = a_n - \frac{1}{3}a_{n-1}$ **0,5p**

$\lim\limits_{n\to\infty}(y_{n+1} - \frac{2}{3}y_n) = \frac{2}{9}a$ i.e. **0,5p**

$\lim\limits_{n\to\infty}(y_{n+1} - \frac{2}{3}y_n) = (1 - \frac{2}{3})\frac{2a}{3}$ **0,5p**

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - \frac{1}{3}a_{n-1}) = (1 - \frac{1}{3})a$ **0,5p**

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ **0,5p**

Total **7p**