Asociațiunea ASTRA – 150 de ani de la înființare (1861-2011)

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „GHEORGHE LAZĂR”

Ediția a XIII-a, 23-25 martie 2012

SIBIU

Clasa a XII-a

1. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă. Să se demonstreze că

$$f^2(1) \leq 2\int_0^1 f^2(x)dx + \int_0^1 [f'(x)]^2 dx$$

Pb.26535, G.M./Seria B/11/2011,
Cătălin Cristea, Craiova

2. Fie $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie care satisface condiţiile:

i) f este continuă in 1;

ii) f este integrabilă pe $[1,3]$;

iii) $f(x^3) \leq xf(x)$, oricare ar fi $x \in (0,\infty)$.

Arătaţi că

$$\int_1^3 f(x)dx \leq \frac{2}{3}(3^{\frac{3}{2}} - 1)f(1)$$

Dumitru Acu, Sibiu

3. Dacă $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă pe $[0,1]$ cu $f(0) = 0$ atunci pentru orice $n \geq 2$ avem

$$\int_0^1 f^{2n}(x)dx \leq n^2 \int_0^1 f^{2n-2}(x)dx \int_0^1 [f'(x)]^2 dx.$$

Emil C.Popa, Sibiu

4. Fie $A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}}$, o matrice cu elementele

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & |i-j| > 1 \\ 2a, & i = j \\ b, & |i-j| = 1 \end{cases}, a, b \in \mathbb{R}$$

Să se calculeze rădăcinile polinomului $P_n(x) = det(A - xI_n)$. (Se consideră $P_0(x) = 1$)

Ioan Ţincu, Sibiu

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 3 ore.

CLASA XII-a
BARI:M DE CORECTARE

1. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă. Să se demonstreze că

$$f^2(1) \leq 2\int_0^1 f^2(x)dx + \int_0^1 [f'(x)]^2 dx$$

Pb.26535/G.M. seria B, nr. 11/2011,
Cătălin Cristea, Craiova

Soluţie

Putem scrie $f^2(1) = \displaystyle\int_0^1 [xf^2(x)]' dx = \int_0^1 [f^2(x) + 2xf(x)f'(x)]dx$ **4p**

Arătam că

$\displaystyle\int_0^1 f^2(x)dx + 2\int_0^1 xf(x)f'(x)dx \leq 2\int_0^1 f^2(x)dx + \int_0^1 [f'(x)]^2 dx,$

$\displaystyle\int_0^1 [f'(x)]^2 dx - 2\int_0^1 xf(x)f'(x)dx + \int_0^1 f^2(x)dx \geq 0$ **1p**

$\displaystyle\int_0^1 [f'(x) - xf(x)]^2 dx + \int_0^1 (1-x^2)f^2(x)dx \geq 0$ **2p**

Total **7p**

2. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ o funcţie care satisface condiţiile:

i) f este continuă in 1;

ii) f este integrabilă pe $[1,3]$;

iii) $f(x^3)\le xf(x)$, oricare ar fi $x\in(0,\infty)$.

Arătaţi că

$$\int_1^3 f(x)dx \le \frac{2}{3}(3^{\frac{3}{2}}-1)f(1)$$

Dumitru Acu, Sibiu

Soluţie In condiţia *iii*) considerăm $x^3=y>0$ şi se obţine

(1) $f(y)\le y^{\frac{1}{3}}f(y^{\frac{1}{3}}), y>0$. **1p**
In (1), fie $y=x^{\frac{1}{3^i}}, i\in\mathbb{N}$; obţinem

(2) $f(x^{\frac{1}{3^i}})\le x^{\frac{1}{3^{i+1}}}f(x^{\frac{1}{3^{i+1}}}), i\in\mathbb{N}$ **1p**
Înmulţim (2) cu $x^{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^i}}$ şi notând
$a_i=x^{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^i}}f(x^{\frac{1}{3^i}}), i\in\mathbb{N}$ se obţine

(3) $a_i\le a_{i+1}, i\in\mathbb{N}$ **2p**

Din (3) găsim $a_0\le a_n$ adică
$xf(x)\le x^{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}}f(x^{\frac{1}{3^n}}), n\in\mathbb{N}$

sau

$xf(x)\le x^{\frac{3}{2}(1-\frac{1}{3^{n+1}})}f(x^{\frac{1}{3^n}}), n\in\mathbb{N}$. **1p**

Cum f este continuă în 1, pentru $n\to\infty$ în (4) găsim
$xf(x)\le x^{\frac{3}{2}}f(1), x>0$,

$f(x)\le\sqrt{x}f(1), x>0$ **1p**

Întegrând pe $[1,3]$, obţinem
$\int_1^3 f(x)dx\le\frac{2}{3}f(1)(3^{\frac{3}{2}}-1)$ **1p**

Total **7p**

3. Dacă $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă pe $[0,1]$ cu $f(0)=0$ atunci pentru orice $n\geq 2$ avem

$$\int_0^1 f^{2n}(x)dx \leq n^2[\int_0^1 f^{2n-2}(x)dx]\{\int_0^1 [f'(x)]^2dx\}.$$

Emil C.Popa, Sibiu

Soluţie

Cum $f(0)=0$ rezultă

$$f^n(x)=\int_0^x [f^n(t)]'dt = n\int_0^x f^{n-1}(t)f'(t)dt. \dots\dots \mathbf{3p}$$

Din inegalitatea C-S-B obţinem

$$f^n(x)\leq n\left\{\int_0^x f^{2n-2}(t)dt\int_0^x [f'(t)]^2dt\right\}^{\frac{1}{2}} \dots\dots \mathbf{2p}$$

$$f^n(x)\leq n\left\{\int_0^1 f^{2n-2}(t)dt\int_0^1 [f'(t)]^2dt\right\}^{\frac{1}{2}} \dots\dots \mathbf{1p}$$

$$f^{2n}(x)\leq n^2\int_0^1 f^{2n-2}(t)dt\int_0^1 [f'(t)]^2dt \dots\dots \mathbf{0{,}5p}$$

În concluzie,

$$\int_0^1 f^{2n}(x)dx\leq n^2\int_0^1 f^{2n-2}(x)dx\int_0^1 [f'(x)]^2dx \dots\dots \mathbf{0{,}5p}$$

Total **7p**

4. Fie $A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}}$, o matrice cu elementele

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & |i-j| > 1 \\ 2a, & i = j, \qquad a, b \in \mathbb{R} \\ b, & |i-j| = 1 \end{cases}$$

Să se calculeze rădăcinile polinomului $P_n(x) = det(A - xI_n)$. (Se consideră $P_0(x) = 1$)

Ioan Ţincu, Sibiu

Soluţie Avem

$$P_n(x) = \begin{vmatrix} 2a-x & b & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ b & 2a-x & b & \ldots\ \ldots & 0 \\ 0 & b & 2a-x & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & \ldots\ldots & b \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & \ldots\ldots & 2a-x \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{1p}$$

Dezvoltând după ultima linie sau coloană vom obţine
$P_n(x) = (2a-x)P_{n-1}(x) - b^2P_{n-2}(x)$,
$P_n(x) - (2a-x)P_{n-1}(x) + b^2P_{n-2}(x) = 0$ **1p**
Notaţie: $P_n(x) = b^n y_n$.

Rezultă

$y_n - \dfrac{2a-x}{b} y_{n-1} + y_{n-2} = 0$ **0,5p**

Notaţie: $\dfrac{2a-x}{b} = \cos\alpha, \alpha = \arccos\dfrac{2a-x}{2b}$ **1p**

Obţinem
$y_n - 2\cos\alpha y_{n-1} + y_{n-2} = 0$,
$t^2 - 2\cos\alpha t + 1 = 0$,
$(t - \cos\alpha)^2 - i^2\sin^2\alpha = 0$
$t_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha, t_2 = \cos\alpha - i\sin\alpha$ **0,5p**
Prin urmare,
$y_n = c_1t_1^n + c_2t_2^n = c_1(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) + c_2(\cos n\alpha - i\sin n\alpha)$
$y_n = (c_1 + c_2)\cos n\alpha + i(c_1 - c_2)\sin n\alpha$,
$y_n = c\cos n\alpha + d\sin n\alpha$. **1p**
Constantele c si d se determină din
$y_0 = c = 1$
$y_1 = \cos\alpha + d\sin\alpha$
$y_1 = \dfrac{P_1(x)}{b} = \dfrac{2a-x}{b} = 2\cos\alpha$
Rezultă $d = ctg\alpha$ **0,5p**

Prin urmare,

$y_n = \cos n\alpha + ctg\alpha\sin n\alpha, y_n = \dfrac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}$ **0,5p**

Din $y_n = 0$ rezultă

$\alpha_k = \dfrac{k\pi}{n+1}, k = 1, 2, ..., n,$

deci

$$\frac{2a - x_k}{2b} = \cos\frac{k\pi}{n+1},$$

$x_k = 2a - 2bc\cos\dfrac{k\pi}{n+1}, k = \overline{1, n}$. **1p**