Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**

Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude”

ediţia a XII-a

Galaţi, 5 noiembrie 2011

Clasa a X-a

Problema 1..

a) Se consideră numerele reale $a, b, c, d \in (1;+\infty)$. Să se demonstreze că

$$\log_{\frac{1}{(a+b)^2}} \frac{9}{4\cdot\left(\frac{a+b}{2}+c+d\right)^2}\cdot\log_{\frac{1}{(b+c)^2}} \frac{9}{4\cdot\left(\frac{b+c}{2}+d+a\right)^2}\cdot\log_{\frac{1}{(c+d)^2}} \frac{9}{4\cdot\left(\frac{c+d}{2}+a+b\right)^2}\cdot\log_{\frac{1}{(d+a)^2}} \frac{9}{4\cdot\left(\frac{d+a}{2}+b+c\right)^2}\geq 1$$

Rodica şi Dumitru Bălan, profesori, Galaţi

b) Să se demonstreze că $\left\{\sum_{k=1}^{n} \sqrt[k^4+k^2+1]{1+k}\right\} < \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, unde prin $\{x\}$ s-a notat partea fracţionară a numărului real x.

Mihai Totolici, profesor, Galaţi

Problema 2..

Se consideră triunghiul ascuţitunghic ABC şi H, ortocentrul său. Pe semidreptele $(HA, (HB, HC$ se consideră punctele A', B', C' astfel încât $HA' = BC,\ HB' = CA,\ HC' = AB$.
Să se demonstreze că:

a) Medianele triunghiului ABC sunt perpendiculare pe laturile triunghiului $A'B'C'$;

b) H este centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$.

* * *

Problema 3

a) Se consideră punctele $A, B, C, D, M \in [AB], N \in [DC]$, cu $AM = k\cdot MB$ şi $DN = k\cdot NC$, unde $k > 0$, dat. Să se demonstreze că $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{k+1}\cdot\left(\overrightarrow{AD} + k\cdot\overrightarrow{BC}\right)$.

b) Punctele mobile M şi N parcurg cercurile $C(O_1;R_1)$, respectiv $C(O_2;R_2)$. Să se determine multimea punctelor P cu proprietatea $MP = k\cdot PN, P\in[MN]$, unde $k > 0$, dat.

Vasile Popa, profesor, Galaţi