Clasa a VII-a

1. a) Fie numerele naturale nenule *a, b* cu $a<b$. Arătaţi că $b-a \geq (a,b)$, unde (a,b) reprezimtă c.m.m.d.c. pentru numerele *a* şi *b*.

   b) Demonstraţi că oricare ar fi numerele naturale nenule $a_1, a_2, ..., a_{2011}$ cu proprietatea $a_1 < a_2 < ... < a_{2011}$, are loc inegalitatea
   $$\frac{1}{[a_1, a_2]} + \frac{1}{[a_2, a_3]} + ... + \frac{1}{[a_{2010}, a_{2011}]} \leq \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{2011}}$$
   unde $[c,d]$ reprezintă c.m.m.m.c. al numerelor *c* şi *d*.

   Alexandru Lautaru, Petrosani, G.M. 12/2011

2. Să se determine lungimile laturilor unui triunghi isoscel, ştiind că lungimile laturilor sale sunt numere naturale şi că lungimea unei înălţimi este egală cu $\sqrt{2012}$.

   Nicolae Papacu, Slobozia

3. Triunghiul *ABC* este dreptunghic în *B*, iar *M* este mijlocul înălţimii *BD*, $D \in (AC)$. Perpendiculara din *D* pe *AM* intersectează pe *BC* în *E*. Demonstraţi că triunghiul *AEC* este isoscel.

   Romanţa Ghiţă, Ioan Ghiţă, Blaj

Clasa a VIII-a

1. Determinaţi numerele naturale nenule n pentru care $\frac{n+2010}{\left[\sqrt{n+1}\right]}$ şi $\frac{n+2011}{\left[\sqrt{n}\right]}$ sunt numere naturale. Aici $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

   Lucian Dragomir, Oţelu-Roşu, G.M. 12/2011

2. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile x-3, 7-x, x-2. Determinaţi x astfel încât diagonala paralelipipedului să aibă lungime minimă.

   Ioan Voicu, Ialomiţa

3. Să se determine toate intervalele $I=[a,b]$, $a<b$, care au proprietatea: pentru orice $x\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$, $y\in\left[\frac{a+b}{2},b\right]$, rezultă $x+y\in I$ şi $x\cdot y\in I$.

   Nicolae Papacu, Slobozia

Clasa a IX-a

1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia $\left[\sqrt{n}\right]+\left[\frac{n-2}{3}\right]+1=n$.

   Aici $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

   Romanţa Ghiţă, Ioan Ghiţă, Blaj, G.M. 11/2011

2. Într-un triunghi având lungimile laturilor în progresie aritmetică se consideră centrul I al cercului înscris şi centrul O al cercului circumscris. Să se arate că:

a) Una din paralelele duse la laturile triunghiului prin centrul său de greutate conţine punctul I.

b) Una din bisectoarele triunghiului este perpendiculară pe OI.

   I.C. Drăghicescu, Bucureşti

3. Fie ABC un triunghi şi $P \in (AB)$, $Q \in (AC)$, astfel încât

   $$\frac{PB}{PA}=\frac{AC}{BC},\ \frac{QC}{QA}=\frac{AB}{BC}.$$

   Ştiind că centrul cercului înscris în triunghiul ABC aparţine lui PQ, să se arate că ABC este triunghi dreptunghic.

   Vasile Berghea, Avrig, G.M. 11/2011

Clasa a X-a

1. Considerăm numerele complexe distincte z_1, z_2, z_3 de modul 1 astfel încât $\frac{z_1 z_2}{(z_1 - z_2)^2} + \frac{z_2 z_3}{(z_2 - z_3)^2} + \frac{z_3 z_1}{(z_3 - z_1)^2} = -1$. Să se demonstreze că z_1, z_2, z_3 sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

Florin Stănescu, Găieşti, G.M. 12/2011

2. Fie $z \in \mathbf{C}$. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) $z = i$

b) z satisface, simultan, inegalităţile

$$|z + 1 - i| \le 1$$
$$|z^2 + 1 - i| \le 1.$$

Octav Drăgoi

3. Un patrulater este circumscris unui cerc. Dacă se cunosc lungimile a trei dintre laturile sale, se cere să se afle maximul ariei patrulaterului şi să se precizeze când se realizează acesta.

I.C. Drăghicescu, Bucureşti

Clasa a XI-a

1. Fie $A,\ B \in M_2(\mathbf{C})$, astfel încât $AB = O_2$. Să se demonstreze că

   $$\det\left((A+B)^n\right) = \det\left(A^n + B^n\right)$$

   pentru orice $n \geq 1$ număr natural.

Nicolae Bourbăcuţ, Sarmizegetusa Regia, G.M. 1/2012

2. Fie numerele $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$. Să se demonstreze inegalitatea

   $$\frac{a+3b}{(a+b)(3a+b)} + \frac{a+3c}{(a+c)(3a+c)} \leq \frac{1}{a}.$$

Benedict Niculescu, Bucureşti

3. Fie $a > 1$. Se consideră o funcţie continuă $F : (0,\infty) \to (0,\infty)$, astfel încât

   $F(1) = 1$ şi $F(a) = a$.

   Să se arate că există $c \in (1, a)$ astfel încât $F(c) \cdot (1 + \ln F(c)) = a$

*****

Clasa a XII-a

1. Fie n un număr natural, $n \geq 2$ şi $(G, \cdot)$ un grup cu $n^2 - n - 1$ elemente. Ştiind că $F : G \to G,\ F(x) = x^n$, este morfism de grup, să se arate că $(G, \cdot)$ este abelian.

Marin Stroe, Hunedoara, G.M. 12/2011

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, dat prin relaţia $I_n = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x^{2n-1}}{(x^2+1)^n} dx, \quad n \geq 1$.

a) Studiaţi monotonia şi mărginirea şirului $(I_n)_{n\geq 1}$ şi calculaţi $\lim_{n\to\infty} nI_n$.

b) Calculaţi $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{5^k}\right)$.

Nicolae Papacu, Slobozia

3. Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x + (\sin x)^{2012}}{1 + (\sin x)^{2012} + (\cos x)^{2012}} dx$.

Florin Nicolaescu, Balş