

SPERANȚE RÂMNICENE –ediția a X-a
5mai 2012
Clasa a IV-a

Problema 1

Pentru 4 bluze și 2 fuste s-au plătit 660 lei, iar pentru 3 fuste și 4 bluze s-au plătit 700 lei. Aflați prețul unei bluze și a unei fuste.

învățător Dumbrăvescu Rodica, Școala „Vasile Cristoforeanu” Rm. Sărat

Problema 2

Află valoarea necunoscutei din relația:

$$15 - \{ 30 - [15 - (a : 5 + 8) : 2] : 2 \} : 5 = 10$$

Felicia Stoian, prof.înv. Rm. Sărat

Problema 3

Un număr natural adunat cu jumătatea sa, cu sfertul său și cu optimea sa dă 30.
Aflați numărul.

P 451 / G.M. nr.3 / 2012

Timp de lucru 2 ore. Fiecare problema se notează cu 7 puncte.

SPERANȚE RÂMNICENE –ediția a X-a
5mai 2012
Clasa a V-a

Problema 1

Demonstrați că numărul $N = 6^{61} + 6^{62} + 6^{63} + \dots + 6^{128}$ este divizibil cu 259.

E:14127 ,G M 2 / 2011,Vasile Chiriac,Bacau

Problema 2

Determinați numerele de două cifre , astfel încât diferența dintre fiecare număr și răsturnatul său să fie egală cu 45 .

Cristina Ghiuru,profesor,Rm. Sărat

Problema 3

Determinați două numere naturale , a căror sumă să fie 109 , știind că dacă îl împărțim pe primul la al doilea , obținem restul 35 și , dacă-l împărțim pe al doilea la primul , obținem restul 37 .

Constantin Apostol,Rm.Sărat

Timp de lucru 2 ore.Fiecare problema se noteaza cu 7 puncte.

SPERANȚE RÂMNICENE –ediția a X-a
5mai 2012
Clasa a VI-a

Problema 1

Determinați numerele naturale a și b știind că b este număr prim și că $a + a^2 + b^3 = 98$.

E:14020 , G M 6 / 2010,Daniela Chendrea,Constanța

Problema 2

Arătați că dacă într – un triunghi măsurile unghiurilor sunt direct proporționale cu trei numere naturale cu proprietatea că unul dintre ele este egal cu suma celorlalte două , atunci triunghiul este dreptunghic .

Marin Simion,profesor,Rm.Sărat

Problema 3

Fie A_1, A_2, \dots, A_n puncte coliniare , astfel încât $A_1A_2 = x$, $A_2A_3 = 2x$, $A_3A_4 = 3x$, \dots , $A_{n-1}A_n = (n-1)x$, unde $x \in \mathbb{N}^*$.

- a) Dacă M este mijlocul segmentului (A_9, A_{10}) și N este mijlocul segmentului (A_{24}, A_{25}) , aflați lungimea segmentului (MN) .
- b) Aflați x și n , astfel încât $A_1A_n = 870$.

Cristina Ghiuru,profesor,Rm. Sărat

Timp de lucru 2 ore.Fiecare problema se noteaza cu 7 puncte.

SPERANȚE RÂMNICENE –ediția a X-a
5mai 2012
Clasa a VII-a

Problema 1

Aflați numerele întregi x , diferite de -1 , astfel încât,

$$\sqrt{\frac{x-2010}{x+1}}$$

să fie număr întreg.

E:14089 ,G M 11/ 2010

Problema 2

O coală de hârtie sub formă de dreptunghi cu dimensiunile a și b , se îndoaie după o diagonală. Dacă $a = 2b$, calculați ce procent din aria dreptunghiului reprezintă aria suprafeței suprapuse.

D.M. Batinetu-Giurgiu, Bucuresti și Neculai Stanciu, Buzau

Problema 3

Fie pătratul ABCD, $E \in [BC]$, $F \in [DC]$, astfel încât $[BE]=[CF]$;
Dreapta DE intersectează AB în M, iar dreapta AF intersectează BC în N. Arătați că:

- a) AE și MN sunt perpendiculare;
- b) Determinați lungimea segmentului [BE] astfel încât aria triunghiului AEF să fie minimă.

Dragoș Lăzărescu, profesor, Rm. Sărat

Timp de lucru 2 ore. Fiecare problema se notează cu 7 puncte.

SPERANȚE RÂMNICENE –ediția a X-a

5mai 2012

Clasa a VIII-a

Problema 1

Dacă a, b, c sunt dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic care verifică simultan condițiile: $a(a+1) = b+c, b(b+1) = c+a, c(c+1) = a+b$, atunci acesta este cub.

G.M.11/2011, E:14262, Ion Neață, Slatina

Problema 2

Determinați funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care $2f(x) + 3f(3-x) = 22 - 3x$.

Marieana Apostol, profesor, Rm.Sărat

Problema 3

Pe planul triunghiului dreptunghic ABC cu $AB = AC = 4\sqrt{2}$ cm, în punctul A se ridică perpendiculara, pe care se consideră punctele E și F, astfel încât $AE = 4\sqrt{3}$ cm și $AF = 4\sqrt{15}$ cm. Arătați că aria triunghiului EBC este media geometrică a ariilor triunghiurilor ABC și FBC.

Constantin Apostol, Rm.Sărat

Timp de lucru 2 ore. Fiecare problema se notează cu 7 puncte.

SPERANȚE RÂMNICENE –ediția a X-a
5mai 2012
Clasa a IX-a

Problema 1

Să se reprezinte într-un sistem de axe xOy mulțimea
 $A = \{P(x, y) \mid |x + y| + |x - y| = 1\}$

Costică Ambrinoc, profesor, Rm. Sărat

Problema 2

Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, atunci:

$$\frac{a}{a^2 + bc} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

Generalizare: Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$, $a_{n+1} = a_1$ și $a_{n+2} = a_2$ atunci

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{a_k^2 + a_{k+1}a_{k+2}} \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$$

D.M. Bătinețu-Giurgiu, București și Neculai Stanciu, Buzău

Problema 3

Să se determine funcțiile $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$, cu proprietatea că

$$\frac{f(x) + y}{x + f(y)} + \frac{f(x) \cdot y}{x \cdot f(y)} = \frac{2(x + y)}{f(x + y)} \quad \forall x, y \in \mathbb{N}^*$$

G.M. 7-8-9/2011, E:26486, Lucian Dragomir, Oțelu Roșu

Timp de lucru 2 ore. Fiecare problema se notează cu 7 puncte.

SPERANȚE RÂMNICENE –ediția a X-a
5mai 2012
Clasa a X-a

Problema 1

Să se rezolve ecuația:

$$2^x + 2^{-x} = 2 \cos \frac{x}{3}$$

G.M. 7-8-9/2011, E:26490

Problema 2

Demonstrați inegalitatea:

$$\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 > \frac{2^{4n+3}}{3^{2n+2}}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

Constantin Rusu, Rm.Sărat

Problema 3

Să se determine $z \in \mathbb{C}$ astfel încât:

$$z^3 - 3 \cdot iz = -1 + i.$$

Ovidiu Țățan, profesor, Rm.Sărat

Timp de lucru 2 ore. Fiecare problema se noteaza cu 7 puncte.

SPERANȚE RÂMNICENE –ediția a X-a
5 mai 2012
Clasa a XI-a

Problema 1

Fie șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin $a_0 = 0, a_{n+1}^2 = \frac{1 + 2a_n \sqrt{1 - a_n^2}}{2a_n \sqrt{1 - a_n^2} + 2 - a_n^2}, a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

- a) Să se determine $a_n, n \geq 0$ precum și limita șirului,
b) Să se determine $n \in \mathbb{N}$ pentru care

$$|a_n - 1| \leq \frac{1}{2011}$$

G.M. 6/2011, E:26475, Constantin Tarnu, Sibiu

Problema 2

Să se arate că dacă $A \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A^2 = 2A - I_n$ atunci:

$$\det(A^{2011} + 2010I_n) = 2011^n \det A$$

Ghiță Gheorghe, profesor, Buzău

Problema 3

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care are limită finită în orice punct $x_0 \in [a, b]$.
Să se arate că f este mărginită.

G.M. 7-8-9/2010, E:26347

Timp de lucru 2 ore. Fiecare problema se notează cu 7 puncte.

SPERANTE RÂMNICENE EDIȚIA a X-a
5 mai 2012
Clasa a XII-a

Problema 1

Calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \int_0^{n^2} [x] dx, \quad \text{unde } \alpha \in R_+^*$$

Dragoș Lăzărescu, profesor, Rm. Sărat

Problema 2

Fie $f : [0,1] \rightarrow R$ o funcție derivabilă astfel încât :

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xf(x) dx = 0$$

Să se arate că ecuația $f'(x) = 0$ are cel puțin o soluție în intervalul (0,1).

G.M. 5/2011, E:26466, Cezar Lupu

Problema 3

Fie A un inel comutativ și $f \in A[X]$, $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + \dots + a_nX^n$
un polinom oarecare de grad $n \geq 1$.

Polinomul f se numește reciproc de speța I (respectiv reciproc de speța a II-a) dacă $a_k = a_{n-k}$ (respectiv $a_k = -a_{n-k}$) pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n\}$

a) Știind ca $2=1+1$ este inversabil in inelul A , arătați că orice polinom de grad $n \geq 1$ cu $a_n \neq a_0$ și $a_n \neq -a_0$ poate fi scris in mod unic ca sumă de două polinoame de grad n , unul reciproc de speța I si celalalt reciproc de speța a II-a.

b) Scrieți ca la a) fiecare din polinoamele :

$$f_1 = 4X^2 + 5X + 1 \in Q[X]$$

$$f_2 = X^3 + \hat{3}X + \hat{2} \in Z_9[X]$$

Marcel Țena, București

Timp de lucru 2 ore. Fiecare problema se notează cu 7 puncte.