

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICA „NICOLAE PĂUN”
EDIȚIA a XVIII- a – DECEMBRIE 2011

SUBIECTE CLASA a VIII-a

Problema 1.

a) Să se arate că expresia $E(x, y) = \frac{\sqrt{y^2 + 1} - y + x}{x\sqrt{y^2 + 1} + xy + 1}$ nu depinde de x .

b) Fie m, n nr. naturale cu $m > 2^n$ și $a = \sqrt{\frac{m + 2^n}{m - 2^n}}$. Să se arate că dacă $a \in \mathbb{N}$ atunci a este impar.

G.M.

Problema 2.

Fie a, b, c, d numere strict pozitive a.î. $|x - y| \leq 2$ pentru orice $x, y \in \{a, b, c, d\}$.
Demonstrați că :

$$a + b + c + d \leq \sqrt{ab + 1} + \sqrt{bc + 1} + \sqrt{cd + 1} + \sqrt{da + 1} < a + b + c + d + 4.$$

Problema 3.

- Un șirag de 15 mărgel, 5 roșii și 10 negre, sunt înșirate pe un cerc. Să se arate că:
- Pentru orice aranjare a mărgelilor există șase consecutive dintre care două roșii și patru negre.
 - Este adevărat ca pentru orice aranjare a mărgelilor există șase consecutive dintre care trei roșii și trei negre ?

V. Pop

Problema 4.

Fie $ABCD A'B'C'D'$ un cub, $AB = a$ și punctele E și N mijloacele segmentelor $[AB]$ respective $[CD]$. Dacă $EF \perp AC$, $F \in (AC)$ și punctele E', N' sunt mijloacele segmentelor $[A'B']$ respectiv $[C'D']$, calculați:

- lungimea segmentului $[FN']$
- $d(FB', NN')$
- $m[\sphericalangle(FB, D'E')]$

C.Bărăscu

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii, timp de lucru 3 ore.