CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICA „NICOLAE PĂUN”
EDIȚIA a XVIII- a – DECEMBRIE 2011

SUBIECTE CLASA a IX-a

Problema 1.

Fie a, b numere întregi astfel încât

$$a > b > 1,\quad a+b \text{ divide } ab+1 \text{ si } a-b \text{ divide } ab-1.$$

Demonstrați că $a < b\sqrt{3}$.

***

Problema 2.

Fie $M = \{1, 2, ..., 2011\}$. Să se determine cel mai mic număr natural k cu proprietatea că orice submulțime cu k elemente a lui M conține două numere distincte astfel încât unul îl divide pe celălalt.

***

Problema 3.

a) Să se arate că $\left\{\frac{2}{2011}\right\} + \left\{2 \cdot \frac{2}{2011}\right\} + \left\{3 \cdot \frac{2}{2011}\right\} + ... + \left\{2010 \bullet \frac{2}{2011}\right\} = 1005$.

b) Dacă p este un număr natural prim cu 2011, demonstrați că

$$\left\{\frac{p}{2011}\right\} + \left\{2 \cdot \frac{p}{2011}\right\} + \left\{3 \cdot \frac{p}{2011}\right\} + ... + \left\{2010 \cdot \frac{p}{2011}\right\} = 1005.$$

M. Piticari,V. Cerbu

Problema 4.

Se consideră triunghiul ABC și punctele $M \in (BC), N \in (AC), P \in (AB)$ astfel încât $BM = CN = AP$. Fie X, X', Y, Y', Z, Z' respectiv mijloacele segmentelor $[AN], [CP], [BP], [AM], [CM], [BN]$.

a) Să se arate că XX' este paralelă cu bisectoarea unghiului *A;*
b) Să se arate că se poate construi un triunghi cu laturile de lungimi XX', YY', ZZ'.
c) Să se arate că $XX' = YY' = ZZ'$ dacă şi numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

Se cere soluție vectorială.

D. Heuberger

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii, timp de lucru 3 ore.