

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICA „NICOLAE PĂUN”
EDIȚIA a XVIII-a – DECEMBRIE 2011

SUBIECTE CLASA a X-a

Problema 1.

Să se determine funcțiile crescătoare $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că
 $f^2(\sin x) - 3f(x) + 2 = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

D. Andrica, M. Piticari

Problema 2.

a) Determinați $a, b, c \in (0, 1)$ cu proprietatea

$$\log_a \frac{2b}{a+b} + \log_b \frac{2c}{b+c} + \log_c \frac{2a}{c+a} = 0$$

C. Drugan

b) Să se determine numerele complexe z cu proprietatea

$$|z - i| = |z^2 - 1| = |z^3 + i| = 1.$$

V. Pop

Problema 3.

Se consideră funcțiile $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ care verifică relația:

$$f(2011f(x) + f(y)) = 2011x + y, \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

Arătați că:

a) $f(0) = 0$ b) $f(f(x)) = x, \quad \forall x \in \mathbb{Q}$ c) determinați funcțiile f .

Constantin Bușe, Manuela Prajea

Problema 4.

Fie $\alpha \in \mathbb{C}$ cu proprietatea că există punctele A, B, C, D situate în cadranele I, II, III respectiv IV având afixele z_1, z_2, z_3, z_4 care verifică $|z_k - \alpha| \leq 1, k = \overline{1, 4}.$

Să se arate că $|\alpha| \leq 1.$

S. Ulmeanu, V. Gorgotă

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii, timp de lucru 3 ore.