CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICA „NICOLAE PĂUN”
EDIȚIA a XVIII- a – DECEMBRIE 2011

SUBIECTE CLASA a XI-a

Problema 1.

Fie $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ astfel încât $A^2 + B^2 = AB = A + B$. Să se arate că

$$\det(A) = \det(B) = \det(A + B) = 0.$$

M. Piticari, V. Cerbu

Problema 2.

Fie matricele $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ şi $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ astfel ca:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Să se determine $B \cdot A$.

V. Pop

Problema 3.

Fie $(x_n)_{n\in N^*}$ şirul definit prin $x_n \in [0,1]$ arbitrar şi $x_{n+1} = \frac{1}{n} x_n + \frac{n-1}{n} x_n{}^2$, pentru orice $n \in N^*$.

(a) Arătați că $(x_n)_{n\in N^*}$ este convergent şi aflați $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$;

(b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \sqrt[n]{x_n}$.

Nicolae Bourbăcuț, Viorel Cornea şi Ioan Şerdean

Problema 4.

Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale strict pozitive cu proprietatea că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc $a_1 + a_2 + ... + a_n < n^2$.

Demonsrați că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right) = \infty$.

M. Piticari

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii, timp de lucru 3 ore.