Concursul Naţional de Matematică Aplicată "*Adolf Haimovici*"

Etapa locală - 11 februarie 2012

Clasa a IX-a - tehnic şi servicii

1. Se consideră triunghiul ABC cu centrul de greutate notat cu G.

a) Demonstraţi că $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{O}$;

b) Dacă P este un punct din plan astfel încât $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}=\vec{O}$, demonstraţi că P = G.

2. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică astfel încât $a_1 + a_2 + ... + a_n = n^2$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Determinaţi primul termen şi raţia progresiei;

b) Arătaţi că progresia nu-l conţine pe 2012, dar îl conţine pe 2011.

3. Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică cu proprietatea că termenii b_{2011} si b_{2012} sunt numere raţionale . Demonstraţi că toţi termenii progresiei sunt numere raţionale.

4. a) Demonstraţi că $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

b) Calculaţi suma $S=6^2+7^2+8^2+.....+50^2$.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 10 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Str. Gh. Bariţiu nr. 2, 330065 - DEVA,
jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro

Concursul Naţional de Matematică Aplicată "*Adolf Haimovici*"
Etapa locală - 11 februarie 2012

Clasa a X-a - tehnic şi servicii

1. a) Fie x_1 si x_2 rădăcinile complexe ale ecuaţiei $x^2-2x+2=0$. Arătaţi că numărul $x_1^{2012}+x_2^{2012}$ este real.

b) Determinaţi numărul complex z care verifică egalitatea $|z+i|^2=2|z|^2+2$.

2. Fie a, b, c, x $\in(0;\infty)\setminus\{1\}$ astfel încât a, b şi c să fie în progresie geometrică. Demonstraţi că numerele $\frac{1}{\log_a x},\frac{1}{\log_b x}$ şi $\frac{1}{\log_c x}$ sunt în progresie aritmetică.

3. Aflaţi numărul $a\in\mathbb{R}$ care verifică egalitatea $\sqrt{3+a\sqrt{2}}-\sqrt{3-a\sqrt{2}}=2$

4. a) Arătaţi că $a^3+b^3+c^3=\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]+3abc$, $(\forall)\ a,b,c\in\mathbb{R}$;

b) Determinaţi numărul $n\in\mathbb{N}$ ştiind că $8^n+27^n+125^n=3\cdot 30^n$.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 10 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Concursul Naţional de Matematică Aplicată "*Adolf Haimovici*"

Etapa locală - 11 februarie 2012

Clasa a XI-a - tehnic şi servicii

1. În sistemul cartezian xOy considerăm punctele $A_n\left(2^n;5^n\right)$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Arătaţi că punctele A_1, A_2 şi A_3 nu sunt coliniare;

b) Aflaţi $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât aria triunghiului de vârfuri A_n, A_{n+1}, A_{n+2} să fie 6000.

2. Fie matricea A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, cu $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$.

a) Demonstraţi că $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2=O_2$;

b) Demonstraţi că $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$ are loc egalitatea $\det(A-xI_2) = x^2 - (a+d)x + (ad-bc)$;

c) Dacă $\det\left(A-\sqrt{2}I_2\right)=0$ demonstraţi că $A^2 = 2I_2$.

3. Calculaţi următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln(x+3)-2\ln(x+2)+\ln(x+1)\right]$;

b) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{e^{x^2-1}-1}{x^2-3x+2}\right)$.

4. Determinaţi numerele reale a şi b astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=2$.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 10 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Str. Gh. Bariţiu nr. 2, 330065 - DEVA,
jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro

Concursul Naţional de Matematică Aplicată "*Adolf Haimovici*"
Etapa locală - 11 februarie 2012

Clasa a XII-a - tehnic şi servicii

1. Pe mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$, definim operaţia "$\circ$" prin relaţia $x \circ y = (x-5)(y-5)+5, \forall x,y \in \mathbb{R}$. De asemenea, fie $G=(5,\infty)$.

a) Demonstraţi că G este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea "$\circ$";

b) Demonstraţi că G formează o structură de grup comutativ în raport cu operaţia "$\circ$";

c) Determinaţi toate valorile numărului real x pentru care $\underbrace{x \circ x \circ ... \circ x}_{2012} = x$.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x^2+3x+2)e^x$ şi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=(ax^2+bx+c)e^x$.

a) Aflaţi $a,b,c \in \mathbb{R}$ astfel încât F să fie primitivă a funcţiei f;

b) Calculaţi $\int F(x)dx$.

3. Fie $G=\{e;\ a;\ b\}$ un grup cu 3 elemente a cărui lege de compoziţie este notată cu "$\circ$" şi având ca element neutru pe „ e ”.

a) Demonstraţi că $a \circ b = e$;

b) Determinaţi $b \circ b \circ b \circ b \circ b$.

4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}(x+1)(x+2), x\geq 0\\ e^x+1, x<0\end{cases}$.

a) Demonstraţi că funcția f admite primitive pe mulțimea numerelor reale;

b) Determinaţi pe mulțimea numerelor reale primitiva F a funcţiei *f,* cu proprietatea că $F(1)=0$.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 10 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.