## Proba tip OIM, juniori

**Problema 1.** Arătaţi că numărul

$$\overline{\underbrace{aaa\ldots a}_{2011 \text{ ori}}0a}$$

nu este pătrat perfect pentru nicio cifră nenulă $a$.

**Soluţie.** Ultima cifră a unui pătrat perfect nu poate fi 2, 3, 7 sau 8. Dacă $a = 5$, penultima cifră ar trebui să fie 2. Dacă $a = 6$, numărul dat este de forma $4k + 2$, care nu poate fi pătrat perfect.

Cazurile $a = 4$ şi $a = 9$ se reduc la $a = 1$, pentru care numărul este de forma $8k + 5$, care nu poate fi pătrat perfect.

**Problema 2.** Determinaţi numerele naturale nenule $a, b$ pentru care există mulţimile $A, B \subset \mathbb{N}^*$ astfel încât $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{N}^*$ şi $aA = bB$ (dacă $x \in \mathbb{N}$ şi $M$ este o mulţime de numere, $xM = \{xm \mid m \in M\}$).

**Soluţie.** Presupunând că $1 \in A$, rezultă că $a \in bB$, deci există $p \in B$ astfel încât $a = pb$. În plus, $p \geq 2$, deoarece $1 \in A$.

Orice pereche $(pb, b)$, cu $b \in \mathbb{N}^*$, este soluţie a problemei, considerând partiţia

$$\begin{aligned} A &= \left\{p^{2n} \cdot q \mid n \in \mathbb{N},\ \ q \in \mathbb{N}^*,\ p \nmid q\right\} \\ B &= \left\{p^{2n+1} \cdot q \mid n \in \mathbb{N},\ \ q \in \mathbb{N}^*,\ p \nmid q\right\} \end{aligned}$$

**Problema 3.** O mulţime $\mathcal{D}$ de $n$ drepte din plan are proprietatea că fiecare dreaptă a mulţimii intersectează exact 2011 de drepte din $\mathcal{D}$. Determinaţi $n$.

**Soluţie.** Fie $d$ o dreaptă din $\mathcal{D}$. Presupunând că $d$ este paralelă cu $k$ drepte din $\mathcal{D}$, rezultă $n = 2012 + k$.

Dacă $a$ este o dreaptă din $\mathcal{D}$, diferită de $d$, cum $a$ intersectează 2011 drepte din $\mathcal{D}$, ea este paralelă cu $n - 2012 = k$ drepte din $\mathcal{D}$.

Aşadar, fiecare dreaptă din $\mathcal{D}$ este paralelă cu exact $k$ drepte, deci cele $n$ drepte se pot împărţi în grupe de $k + 1$ drepte paralele între ele.

Ca urmare, $k + 1 \mid n$, deci $k + 1 \mid k + 2012$, de unde $k \in \{0, 2010\}$, adică $n \in \{2012, 4022\}$.

O configuraţie validă pentru $n = 2012$ este formată din dreptele suport ale laturilor unui poligon convex cu 2012 laturi, oricare două neparalele.

O configuraţie validă pentru $n = 4022$ este formată din 2011 drepte paralele intersectate de alte 2011 drepte paralele (reţea laticeală).

**Problema 4.** Se consideră un triunghi $ABC$ şi punctele $M \in (BC)$, $N \in (AC)$, $P \in (AB)$ astfel încât $\angle BMP \equiv \angle CNM \equiv \angle APN$ şi $BM = CN = AP$. Demonstraţi că triunghiul $ABC$ este echilateral.

**Soluţie.** Presupunând că $MN \geq PN \geq MP$, rezultă că $m(\widehat{C}) \geq m(\widehat{A}) \geq m(\widehat{B})$, deci $AB \geq BC \geq AC$. **(1)**

Pe de altă parte, din $m(\widehat{C}) \geq m(\widehat{A}) \geq m(\widehat{B})$ şi $\widehat{BMP} \equiv \widehat{CNM} \equiv \widehat{APN}$, rezultă $m(\widehat{NMC}) \leq m(\widehat{ANP}) \leq m(\widehat{BPM})$.

Fie $P' \in (MN)$ şi $M' \in (NP')$ astfel încât $NP' = NP$ şi $NM' = MP$. Rezultă $CM \geq CP' \geq CM'$, adică $MC \geq AN \geq BP$. Cum $BM = CN = AP$, rezultă $BC \geq AC \geq AB$. **(2)**

Din relaţiile **(1)** şi **(2)** rezultă $AB = BC = AC$, deci triunghiul $ABC$ este echilateral.