Soluţii – Proba tip OIM, seniori

Problema 1. Fie n un număr natural nenul şi $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$ numere reale pozitive. Arătaţi că

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} ka_k\right) \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} ka_k^2\right).$$

Soluţie. Din ipoteză, $(i-j)(a_i-a_j)a_ia_j \ge 0$ oricare ar fi i şi j, deci

$$\begin{aligned}
0 \le& \sum_{i,j=1}^{n} (i-j)(a_i-a_j)a_ia_j \\
=& \sum_{i,j=1}^{n} \left(ia_i^2a_j - ia_ia_j^2 - ja_i^2a_j + ja_ia_j^2\right) \\
=& \left(\sum_{i=1}^{n} ia_i^2\right)\sum_{j=1}^{n} a_j - \left(\sum_{i=1}^{n} ia_i\right)\sum_{j=1}^{n} a_j^2 - \\
& \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\sum_{j=1}^{n} ja_j + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\sum_{j=1}^{n} ja_j^2 \\
=&2\left(\sum_{k=1}^{n} ka_k^2\right)\sum_{k=1}^{n} a_k - 2\left(\sum_{k=1}^{n} ka_k\right)\sum_{k=1}^{n} a_k^2,
\end{aligned}$$

de unde inegalitatea cerută.

Problema 2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea:

$$f(xy+x+y) - f(xy-x-y) = 2(f(x)+f(y)),\ \forall\ x,y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Să se arate că f verifică relaţia:

$$f(x+y) = f(x) + f(y),\ \forall\ x,y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Soluţie. $x=y=0 \Rightarrow f(0)=0,\ y=0 \Rightarrow f(-x)=-f(x),\ x \in \mathbb{R}$

$$y=1 \Rightarrow f(2x+1) = 2f(x)+f(1) \tag{3}$$

$$y=-1 \Rightarrow f(2x-1) = 2f(x)-f(1) \tag{4}$$

Notăm $x*y = xy+x+y$ şi avem $(AS):\ x*(y*z) = (x*y)*z$.
Pentru $x=1$, $y*1 = 2y+1$ şi

$$f(y*1) = 2f(y)+f(1),\ \forall\ y \in \mathbb{R} \tag{5}$$

$$f(x*(y*1)) = f(x*(2y+1)) \overset{(1)}{=} f(x(2y+1)-x-2y-1)+2f(x)+2f(2y+1)$$

$$= f(2(xy-y)-1+2f(2y+1)+2f(x) \overset{(3,4)}{=}$$

$$= 2f(xy-y)+f(x)+2f(y)+f(1) \tag{6}$$

$$f((x*y)*1) \stackrel{(5)}{=} 2f(x*y)+f(1) \stackrel{(1)}{=} 2(2f(x)+2f(y))+2f(xy-x-y)+f(1)$$

$$= 2f(xy-x-y)+2f(x)+2f(y)+f(1) \tag{4}$$

Din (6), (7) şi (AS) rezultă:

$$f(xy-x-y)+f(x)=f(xy-y),\ \forall\ x,y\in\mathbb{R}.$$

Notăm $u=x$, $v=xy-x-y \Rightarrow f(u+v)=f(u)+f(v)$, $\forall\ u,v\in\mathbb{R}$ pentru care există $x,y\in\mathbb{R}$ astfel ca $u=x$, $v=xy-x-y \Leftrightarrow x=u$ şi $y=\dfrac{v+u}{u-1}$ pentru $u\neq 1$ şi $v=1$ pentru $x=u=1$.

Rămâne de verificat

$$f(1+v)=f(1)+f(v),\ \forall\ v\in\mathbb{R}$$

şi

$$f(u-1)=f(u)+f(-1),\ \forall\ u\in\mathbb{R}.$$

Din (4) $x\mapsto x+1 \Rightarrow f(2x+1)=2f(x+1)-f(1) \stackrel{(3)}{=} 2f(x)+f(1) \Rightarrow f(x+1)=f(x)+f(1)$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

În concluzie $f(u+v)=f(u)+f(v)$, $\forall\ u,v\in\mathbb{R}$.

Problema 3. O anumită limbă foloseşte un alfabet format din trei litere. Unele secvenţe de două sau mai multe litere sunt interzise, iar orice două secvenţe interzise au lungimi diferite.

Arătaţi că putem forma cuvinte admise de orice lungime.

Soluţie. Fie a_n numărul cuvintelor admisibile cu n litere; atunci $a_1=3$ şi $a_2=8$.

Apoi, dacă prelungim cu o literă un cuvânt corect cu n litere se obţine fie un cuvânt corect cu $n+1$ litere, fie un cuvânt interzis de forma XY, cu Y secvenţa interzisă cu k litere, $2\leq k\leq n$ şi X cuvânt corect cu $n-k+1$ litere. Astfel, cuvintele de al doilea tip sunt în număr de cel mult $a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}$, deci

$$a_{n+1}\geq 3a_n-(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}).$$

Folosind relaţia precedentă, putem demonstra inductiv că $a_{n+1}>2a_n$, oricare ar fi $n\geq 1$. Într-adevăr, dacă admitem relaţia pentru toate numerele de la 1 la $n-1$, $n\geq 2$, atunci $a_n\geq 2^k a_{n-k}$, $1\leq k\leq n-1$, de unde

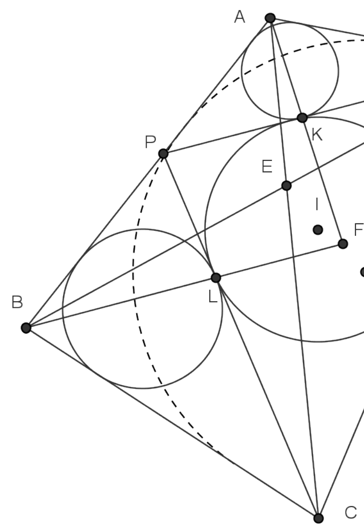
$$a_{n+1}\geq a_n\left(3-\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{n-2}}+\ldots+\frac{1}{2}\right)\right)>2a_n.$$

Astfel, există cel puţin 2^n cuvinte de lungime n.

Problema 4. Un punct P se află pe latura AB a unui patrulater convex $ABCD$. Fie ω cercul înscris în triunghiul CPD şi I centrul său. Se ştie că ω este tangent la cercurile înscrise în triunghiurile APD şi BPC în punctele

K respectiv L. Fie E, respetiv F punctele de intersecţie a dreptelor AC şi BD, respectiv AK şi BL. Demonstraţi că punctele E, I şi F sunt coliniare.

Soluţie. Fie J centrul cercului k tangent dreptelor AB, DA şi BC. Notăm a, respectiv b cercurile înscrise în triunghiurile ADP şi BCP. Vom demonstra mai întâi că $F \in IJ$. Punctul A este centrul omotetiei care duce a în k; K este centrul omotetiei de raport negativ ce duce a în ω. Notăm cu $\bar{F}$ centrul omotetiei care duce ω în k. Dintr-o proprietate cunoscută, punctele A, K şi $\bar{F}$ sunt coliniare. Analog $\bar{F} \in BL$, deci $F = \bar{F}$ de unde $F \in IJ$.



Arătăm acum că $E \in IJ$. Comparând lungimile tangentelor din A, P, C, D la cercurile k şi a obţinem $AP+DC = AD+PC$. Astfel, există cercul d înscris în $APCD$. Fie X centrul omotetiei care duce a în ω. Folosind proprietatea de mai sus pentru cercurile a, dşi ω, A, C şi X sunt colineare. Considerăm din nou cercurile a, ω şi k. Punctul A este centrul omotetiei care duce a în k şi X este centrul omotiei care duce a în ω, deci XA conţine centrul $\bar{E}$ al omotetiei care duce ω în k, de unde $\bar{E} \in AC$. Analog $\bar{E} \in BD$, de unde $\bar{E} = E$, deci $E \in IJ$.