
COLEGIUL NAȚIONAL
„UNIREA”
Str. Cezar Bolliac, Nr. 15, Focşani, Vrancea
Tel / Fax: 0040 237 215659; e-mail: cnu@lufo.ro; http://unireamat.lufo.ro/


# Concursul Interjudețean de Matematică „UNIREA”
# Focşani, 17 martie 2012

## Clasa a XII-a – Soluții şi barem

**Subiectul 1.** a) Dacă o mulțime $K$ de matrice cu $n \geq 1$ elemente este grup împreună cu operația de înmulțire a matricelor, atunci toate matricele au acelaşi rang.

b) Fie $G \subset M_n(\mathbb{C})$ o mulțime nevidă finită şi $G^*$ mulțimea adjunctelor matricelor din G. Se ştie că $G$ şi $G^*$ sunt grupuri împreună cu operația de înmulțire a matricelor şi că $G \cup G^*$ conține cel puțin o matrice singulară. Fie $S = \sum\limits_{A \in G^*} A$. Arătați că $\mathrm{tr}(S)$ este un număr întreg cel mult egal cu 1.

**Soluție**:

a) Fie $A \in K$ oarecare. Atunci $A^{n+1} = A$ şi de aici $rang(A) \geq rang(A^n) = rang(E)$, iar $rang(A) = rang(A^{n+1}) \leq rang(A^n) = rang(E)$, deci $rang(A) = rang(E)$ **(2p)**

b) 1) Dacă rangul matricelor din G ar fi $r \leq n-2$ atunci adjunctele acestor matrice ar fi nule, şi atunci $G^* = \{O_n\}$, deci $S = \sum\limits_{A \in G^*} A = O_n$ şi $\mathrm{tr}(S) = 0$ **(1p)**

2) Dacă rangul matricelor din $G$ ar fi $n$, atunci toate matricele din G ar fi inversabile şi de aici şi toate matricele din $G^*$ ar fi inversabile, ceea ce contrazice ipoteza **(1p)**

3) Rămâne de studiat cazul în care toate matricele din $G$ au rangul $n-1$

Conform relației lui Sylvester avem $0 = rang(O_n) = rang(A \cdot A^*) \geq rang(A) + rang(A^*) - n = rang(A^*) - 1$, deci $rang(A^*) \leq 1$

Deoarece $rang(A) = n-1$, $A$ are cel puțin un minor de ordin $n-1$ nenul, $A^*$ are cel puțin un element nenul. Aşadar $rang(A^*) = 1$, deci toate matricele din $G^*$ au rangul 1. **(1p)**

Fie $I = \{E^* = A_1, A_2, ..., A_k\} \subset G^*$ o mulțime de cardinal maxim cu proprietatea că nu există $p, q \in \mathbb{N}^*$ şi $i, j \in \{1, ..., k\}$, $i \neq j$ astfel încât $A_i^p = A_j^q$

Notăm cu $\overline{A_p} = \{A_p, A_p^2, ..., A_p^{ord(A_p)-1}\}$ şi arătăm că mulțimile $\overline{A_p}$ realizează o partiție a lui $G^*$

COLEGIUL NAȚIONAL
„UNIREA”
Str. Cezar Bolliac, Nr. 15, Focşani, Vrancea
Tel / Fax: 0040 237 215659; e-mail: cnu@lufo.ro; http://unireamat.lufo.ro/

Dacă două din mulțimile $\overline{A_p}$ ar avea un element comun, s-ar contrazice alegerea elementelor mulțimii I. Dacă ar exista $X \in G^* - \bigcup_{p=1}^{k} \overline{A_p}$ atunci s-ar contrazice maximalitatea cardinalului lui I. Aşadar $G^* = \bigcup_{p=1}^{k} \overline{A_p}$ .

Dacă $A \in M_n(\mathbb{C})$ cu $rang(A) = 1$ atunci există $K \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ şi $P \in M_{1,n}(\mathbb{C})$ astfel încât $A = K \cdot P$ şi $A^m = \alpha^{m-1} A$, unde $\alpha = P \cdot K \in \mathbb{C}$

Atunci $A_p^m = \alpha_p^{m-1} A_p$ şi pentru că $A_p = A_p^{ord(A_p)+1}$ rezultă $\alpha_p^{ord(A_p)} = 1$ deci $\alpha_p$ este rădăcină de ordinul $ord(A_p)$ a unității.

Pentru $p \geq 2$ avem $ord(A_p) \geq 2$ şi $\sum_{X \in \overline{A_p}} X = \sum_{i=1}^{ord(A_p)-1} A_p^i = A_p \cdot \sum_{i=0}^{ord(A_p)-2} \alpha_p^i =$

$= A_p \cdot \sum_{i=0}^{ord(A_p)-1} \alpha_p^i - E^* = -E^*$

Atunci $S = E^* + \sum_{p=2}^{k} \sum_{X \in \overline{A_p}} X = E^* - (k-1)E^* = (2-k)E^*$

Din $rang(E^*) = 1$ avem $E^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{matrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{matrix}$ şi $tr(E^*) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Dar $(E^*)^2 = E^* \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = E^* \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 1$

Aşadar $tr(S) = (2-k)tr(E^*) = (2-k)\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 2-k$, de unde rezultă concluzia. **(2p)**

COLEGIUL NAȚIONAL
„UNIREA”
Str. Cezar Bolliac, Nr. 15, Focşani, Vrancea
Tel / Fax: 0040 237 215659; e-mail: cnu@lufo.ro; http://unireamat.lufo.ro/

**Subiectul 2.** Fie $G$ un grup cu $2n$ elemente, $n \geq 2$. Dacă $G$ are două subgrupuri $H_1$ şi $H_2$ fiecare cu câte $n$ elemente astfel încât $H_1 \cap H_2 = \{e\}$, să se arate că:

a) pentru orice $x_1 \in H_1 - \{e\}$ şi orice $x_2 \in H_2 - \{e\}$ avem $x_1 x_2 = c$, unde $\{c\} = G - (H_1 \cup H_2)$;

b) $n = 2$ şi $G$ este izomorf cu grupul lui Klein.

**Soluție**:

a) $card(H_1 \cup H_2) = card(H_1) + card(H_1) - card(H_1 \cap H_2) = 2n - 1$

Atunci $card(G - (H_1 \cup H_2)) = 1$ şi fie $\{c\} = G - (H_1 \cup H_2)$ **(1p)**

Fie $x_1 \in H_1 - \{e\}$ şi $x_2 \in H_2 - \{e\}$ şi presupunem $x_1 x_2 = a$

Dacă $a \in H_1$ atunci $x_2 = (x_1)^{-1} a \Rightarrow x_2 \in H_1$ (contradicție cu $x_2 \in H_2 - \{e\}$)

Analog, dacă $a \in H_2$ atunci $x_1 \in H_2$ (Fals!)

Deci $x_1 x_2 \in G - (H_1 \cup H_2) \Rightarrow x_1 x_2 = c$ **(2p)**

b) Fie $x \in H_1 - \{e\}$ şi $y \in H_2 - \{e\}$

Din a) avem $xy = c \Rightarrow x = cy^{-1} \Rightarrow x$ este unic

Atunci $card(H_1 - \{e\}) = 1 \Rightarrow n - 1 = 1 \Rightarrow n = 2$ **(2p)**

Obținem $H_1 = \{e, u\}$ şi $H_2 = \{e, v\}$ cu $u^2 = v^2 = e$ şi $G = \{e, u, v, c\}$ cu $uv = vu = c$

Atunci $c^2 = uvvu = uv^2 u = u^2 = e$

Deci $G$ este grup cu 4 elemente şi $x^2 = e$, $\forall x \in G$, adică $G$ este izomorf cu grupul lui Klein. **(2p)**

**Subiectul 3.** Arătați că $\int_0^1 e^{t^2} dt \leq \frac{3e-5}{2}$.

**Soluție**:

Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$

Din $e^{t^2} \leq e^t$, $\forall t \in [0,1]$ avem $f(x) \leq \int_0^x e^t dt = e^x - 1 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 e^x - 1 dx = e - 2$ **(3p)**

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x' f(x)dx = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 xe^{x^2} dx = f(1) - \left.\frac{e^{x^2}}{2}\right|_0^1 = f(1) - \frac{e-1}{2}$$ **(3p)**

Atunci $\int_0^1 e^{t^2} dt = f(1) = \int_0^1 f(x)dx + \frac{e-1}{2} \leq e - 2 + \frac{e-1}{2} = \frac{3e-5}{2}$ **(1p)**

COLEGIUL NAȚIONAL
„UNIREA”
Str. Cezar Bolliac, Nr. 15, Focşani, Vrancea
Tel / Fax: 0040 237 215659; e-mail: cnu@lufo.ro; http://unireamat.lufo.ro/

**Subiectul 4.** Să se determine funcțiile $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ şi $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ ştiind că $xf(x)$ este o primitivă pentru $g(x)$, iar $xg(x)$ este o primitivă pentru $f(x)$.

**Soluție**:

$(xf(x))'=g(x)$ şi $(xg(x))'=f(x) \Rightarrow (x(f(x)+g(x)))'=f(x)+g(x)$ **(2p)**

Fie $p(x)=f(x)+g(x)$ şi $(xp(x))'=p(x) \Rightarrow p(x)+xp'(x)=p(x) \Leftrightarrow p'(x)=0$ **(2p)**

$\Rightarrow p(x)=a \Leftrightarrow g(x)=-f(x)+a$

Deci $(xf(x))'+f(x)=a \Leftrightarrow (x(xf(x)))'=\left(\dfrac{ax^2}{2}\right)' \Leftrightarrow x^2f(x)=\dfrac{ax^2}{2}+b$ **(2p)**

Obținem $f(x)=\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{x^2}$ şi $g(x)=\dfrac{a}{2}-\dfrac{b}{x^2}$. **(1p)**