BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA a VI-a

1. Fie numărul $A=4+8+12+...+328$.

a) Calculaţi A;

b) Înlocuiţi un număr minim de semne „+” cu semne „–” astfel încât valoarea lui A să fie 2012.

Stela Boghian, Suceava

Soluţie. **a)** $A=4\cdot(1+2+...+82)=4\cdot\frac{82\cdot 83}{2}=13612$.

b) Pentru a obţine numărul minim de semne „–”, trebuie să înlocuim semnul „+” din faţa numerelor mai mari. Fie $4n$ cel mai mare număr care rămâne adunat. Atunci:

$4\cdot 1+4\cdot 2+...+4n-4(n+1)-4(n+2)-...-4\cdot 82=2012$. De unde:

$1+2+...+n-(n+1)-(n+2)-...-82=503 \Leftrightarrow 1+2+...+n-[(n+1)+(n+2)+...+82]=503$.

$\frac{n(n+1)}{2}-\left[1+2+...+82-(1+2+...+n)\right]=503 \Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2}-\left[\frac{82\cdot 83}{2}-\frac{n(n+1)}{2}\right]=503 \Leftrightarrow$

$\frac{n(n+1)}{2}-41\cdot 83+\frac{n(n+1)}{2}=503 \Leftrightarrow n(n+1)=503+3403 \Leftrightarrow n(n+1)=3906$.

Deci, $n(n+1)=2\cdot 3^2\cdot 7\cdot 31 \Rightarrow n(n+1)=62\cdot 63$, deci $n=62$.

$A=4\cdot(1+2+...+62-63-64-...-82)=2012$; numărul minim de semne „–” este 20.

Barem.

a) $A=4(1+2+...+82)=13612$ ………………………………………………...	**1p**
b) Pentru a obţine numărul minim de semne „–”, trebuie să înlocuim semnul „+” din faţa numerelor mai mari……………………………………………………………………..…..	**1p**
Fie $4n$ cel mai mare număr care rămâne adunat. Atunci: $4\cdot 1+4\cdot 2+...+4n-4(n+1)-4(n+2)-...-4\cdot 82=2012$ ……………………………….…………	**1p**
De unde $1+2+...+n-(n+1)-(n+2)-...-82=503$ …………………………………………………	**1p**
$\frac{n(n+1)}{2}-\left[1+2+...+82-(1+2+...+n)\right]=503 \Rightarrow n(n+1)=3906$ ………………………………………	**1p**
$n(n+1)=2\cdot 3^2\cdot 7\cdot 31 \Rightarrow n(n+1)=62\cdot 63$, deci $n=62$ ……………………………………………...	**1p**
$A=4\cdot(1+2+...+62-63-64-...-82)=2012$; numărul minim de semne „–” este 20……………………..	**1p**

2. Fie mulţimea $M=\left\{n\in\mathbb{N}^* / \frac{2n+1}{3}\in\mathbb{N} \text{ si } \frac{3n+1}{4}\in\mathbb{N}\right\}$.

a) Aflaţi două elemente ale mulţimii M.

b) Determinaţi mulţimea M.

Tamara Brutaru, Suceava

Soluţie. **a)** Pentru $n=13 \Rightarrow \frac{2\cdot 13+1}{3}=\frac{27}{3}=9\in\mathbb{N}$ şi $\frac{3\cdot 13+1}{4}=\frac{40}{4}=10\in\mathbb{N} \Rightarrow 13\in M$.

Pentru $n=25 \Rightarrow \frac{2\cdot 25+1}{3}=\frac{51}{3}=17\in\mathbb{N}$ şi $\frac{3\cdot 25+1}{4}=\frac{76}{4}=19\in\mathbb{N} \Rightarrow 25\in M$.

b) $\frac{2n+1}{3}=\frac{3n-n+1}{3}=\frac{3n-(n-1)}{3}=\frac{3n}{3}-\frac{n-1}{3}=n-\frac{n-1}{3}\in\mathbb{N} \Rightarrow n-1=3p, p\in\mathbb{N}^*$ (1)

$\frac{3n+1}{4}=\frac{4n-n+1}{4}=\frac{4n-(n-1)}{4}=\frac{4n}{4}-\frac{n-1}{4}=n-\frac{n-1}{4}\in\mathbb{N} \Rightarrow n-1=4q, q\in\mathbb{N}^*$ (2).

Din (1), (2) şi $(3,4)=1 \Rightarrow 12/(n-1) \Rightarrow n-1=12k \Rightarrow n=12k+1, k\in\mathbb{N}$.

Deci, $M=\{12k+1 / k\in\mathbb{N}\}$.

Barem.

a) Pentru $n=13 \Rightarrow \frac{2\cdot 13+1}{3}=\frac{27}{3}=9\in\mathbb{N}$ şi $\frac{3\cdot 13+1}{4}=\frac{40}{4}=10\in\mathbb{N} \Rightarrow 13\in M$ ………………………………...	**1p**
Pentru $n=25 \Rightarrow \frac{2\cdot 25+1}{3}=\frac{51}{3}=17\in\mathbb{N}$ şi $\frac{3\cdot 25+1}{4}=\frac{76}{4}=19\in\mathbb{N} \Rightarrow 25\in M$ …………………………………	**1p**
b) $\frac{2n+1}{3}=\frac{3n-n+1}{3}=\frac{3n-(n-1)}{3}=\frac{3n}{3}-\frac{n-1}{3}=n-\frac{n-1}{3}\in\mathbb{N}$ ………………………………………	**1p**
$\frac{3n+1}{4}=\frac{4n-n+1}{4}=\frac{4n-(n-1)}{4}=\frac{4n}{4}-\frac{n-1}{4}=n-\frac{n-1}{4}\in\mathbb{N}$ …………………………………………	**1p**

$\frac{n-1}{3}\in\mathbb{N}\Rightarrow n-1=3p,\ p\in\mathbb{N}^*$ (1) $\frac{n-1}{4}\in\mathbb{N}\Rightarrow n-1=4q,\ q\in\mathbb{N}^*$ (2)……………………………………………………………………………	**1p**
Din (1), (2) şi $(3,4)=1\Rightarrow 12/(n-1)\Rightarrow n-1=12k\Rightarrow n=12k+1,\ k\in\mathbb{N}$. Deci, $M=\{12k+1/k\in\mathbb{N}\}$ ……………………………………………………………………………	**2p**

3. Pe prelungirile laturii BC a triunghiului ΔABC se iau punctele D şi E astfel încât $B\in(DC)$, $(BD)\equiv(AB)$, iar $C\in(BE)$, $(CE)\equiv(AC)$. Dacă M şi N sunt mijloacele segmentelor (AD), respectiv (AE) şi $BM\cap CN=\{P\}$, arătaţi că $(PD)\equiv(PE)$.

Gabriela Sascău, Rădăuţi

Soluţie. Din ipoteză avem: $(BD)\equiv(AB)$, $(MD)\equiv(MA)$, iar (MB) - latură comună $\Rightarrow\Delta ABM\equiv\Delta DBM$ $(L.L.L.)\Rightarrow$ $\sphericalangle MBA\equiv\sphericalangle MBD\Rightarrow\sphericalangle PBA\equiv\sphericalangle PBD$ (suplementele lor) (1). Din ipoteză avem: $(BD)\equiv(AB)$, (PB) - latură comună şi din $(1)\Rightarrow\Delta PBD\equiv\Delta PBA\Rightarrow(PD)\equiv(PA)$. Analog, $\Delta ACN\equiv\Delta ECN$ $(L.L.L.)$ şi $\Delta PCA\equiv\Delta PCE$ $(L.U.L.)\Rightarrow$ $(PE)\equiv(PA)$, deci $(PD)\equiv(PE)$.

Barem.

Figura……………………………………………………………………………………………………	**1p**
$(BD)\equiv(AB)$, $(MD)\equiv(MA)$, iar (MB) - latură comună $\Rightarrow\Delta ABM\equiv\Delta DBM$ $(L.L.L.)\Rightarrow$ $\sphericalangle MBA\equiv\sphericalangle MBD\Rightarrow\sphericalangle PBA\equiv\sphericalangle PBD$ (suplementele lor) (1)…………………………………………………	**1p**
Din ipoteză avem: $(BD)\equiv(AB)$, (PB) - latură comună şi din $(1)\Rightarrow\Delta PBD\equiv\Delta PBA$ $(L.U.L.)$ (2)………………	**1p**
Din (2) $\Rightarrow(PD)\equiv(PA)$ (3)………………………………………………………………………………..	**1p**
Analog, $\Delta ACN\equiv\Delta ECN$ $(L.L.L.)$ şi $\Delta PCA\equiv\Delta PCE$ $(L.U.L.)$ ………………………………………………	**1p**
$(PE)\equiv(PA)$ (4)…………………………………………………………………………………………	**1p**
Din (3) şi (4) $\Rightarrow$ $(PD)\equiv(PE)$ ……………………………………………………………………………	**1p**

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.