

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a VI-a

1. Fie numărul $A = 4 + 8 + 12 + \dots + 328$.

a) Calculați A ;

b) Înlocuiți un număr minim de semne „+” cu semne „-” astfel încât valoarea lui A să fie 2012.

Stela Boghian, Suceava

Soluție. a) $A = 4 \cdot (1 + 2 + \dots + 82) = 4 \cdot \frac{82 \cdot 83}{2} = 13612$.

b) Pentru a obține numărul minim de semne „-”, trebuie să înlocuim semnul „+” din fața numerelor mai mari. Fie $4n$ cel mai mare număr care rămâne adunat. Atunci:

$$4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + \dots + 4n - 4(n+1) - 4(n+2) - \dots - 4 \cdot 82 = 2012. \text{ De unde:}$$

$$1 + 2 + \dots + n - (n+1) - (n+2) - \dots - 82 = 503 \Leftrightarrow 1 + 2 + \dots + n - [(n+1) + (n+2) + \dots + 82] = 503.$$

$$\frac{n(n+1)}{2} - [1 + 2 + \dots + 82 - (1 + 2 + \dots + n)] = 503 \Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} - \left[\frac{82 \cdot 83}{2} - \frac{n(n+1)}{2} \right] = 503 \Leftrightarrow$$

$$\frac{n(n+1)}{2} - 41 \cdot 83 + \frac{n(n+1)}{2} = 503 \Leftrightarrow n(n+1) = 503 + 3403 \Leftrightarrow n(n+1) = 3906.$$

$$\text{Deci, } n(n+1) = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 31 \Rightarrow n(n+1) = 62 \cdot 63, \text{ deci } n = 62.$$

$$A = 4 \cdot (1 + 2 + \dots + 62 - 63 - 64 - \dots - 82) = 2012; \text{ numărul minim de semne „-” este } 20.$$

Barem.

a) $A = 4(1 + 2 + \dots + 82) = 13612$	1p
b) Pentru a obține numărul minim de semne „-”, trebuie să înlocuim semnul „+” din fața numerelor mai mari.....	1p
Fie $4n$ cel mai mare număr care rămâne adunat. Atunci: $4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + \dots + 4n - 4(n+1) - 4(n+2) - \dots - 4 \cdot 82 = 2012$	1p
De unde $1 + 2 + \dots + n - (n+1) - (n+2) - \dots - 82 = 503$	1p
$\frac{n(n+1)}{2} - [1 + 2 + \dots + 82 - (1 + 2 + \dots + n)] = 503 \Rightarrow n(n+1) = 3906$	1p
$n(n+1) = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 31 \Rightarrow n(n+1) = 62 \cdot 63$, deci $n = 62$	1p
$A = 4 \cdot (1 + 2 + \dots + 62 - 63 - 64 - \dots - 82) = 2012$; numărul minim de semne „-” este 20.....	1p

2. Fie mulțimea $M = \left\{ n \in \mathbb{N}^* / \frac{2n+1}{3} \in \mathbb{N} \text{ și } \frac{3n+1}{4} \in \mathbb{N} \right\}$.

a) Aflați două elemente ale mulțimii M .

b) Determinați mulțimea M .

Tamara Brutaru, Suceava

Soluție. a) Pentru $n = 13 \Rightarrow \frac{2 \cdot 13 + 1}{3} = \frac{27}{3} = 9 \in \mathbb{N}$ și $\frac{3 \cdot 13 + 1}{4} = \frac{40}{4} = 10 \in \mathbb{N} \Rightarrow 13 \in M$.

Pentru $n = 25 \Rightarrow \frac{2 \cdot 25 + 1}{3} = \frac{51}{3} = 17 \in \mathbb{N}$ și $\frac{3 \cdot 25 + 1}{4} = \frac{76}{4} = 19 \in \mathbb{N} \Rightarrow 25 \in M$.

b) $\frac{2n+1}{3} = \frac{3n-n+1}{3} = \frac{3n-(n-1)}{3} = \frac{3n}{3} - \frac{n-1}{3} = n - \frac{n-1}{3} \in \mathbb{N} \Rightarrow n-1 = 3p, p \in \mathbb{N}^* \quad (1)$

$$\frac{3n+1}{4} = \frac{4n-n+1}{4} = \frac{4n-(n-1)}{4} = \frac{4n}{4} - \frac{n-1}{4} = n - \frac{n-1}{4} \in \mathbb{N} \Rightarrow n-1 = 4q, q \in \mathbb{N}^* \quad (2).$$

$$\text{Din (1), (2) și (3, 4) = 1} \Rightarrow 12 / (n-1) \Rightarrow n-1 = 12k \Rightarrow n = 12k + 1, k \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Deci, } M = \{12k + 1 / k \in \mathbb{N}\}.$$

Barem.

a) Pentru $n = 13 \Rightarrow \frac{2 \cdot 13 + 1}{3} = \frac{27}{3} = 9 \in \mathbb{N}$ și $\frac{3 \cdot 13 + 1}{4} = \frac{40}{4} = 10 \in \mathbb{N} \Rightarrow 13 \in M$	1p
Pentru $n = 25 \Rightarrow \frac{2 \cdot 25 + 1}{3} = \frac{51}{3} = 17 \in \mathbb{N}$ și $\frac{3 \cdot 25 + 1}{4} = \frac{76}{4} = 19 \in \mathbb{N} \Rightarrow 25 \in M$	1p
b) $\frac{2n+1}{3} = \frac{3n-n+1}{3} = \frac{3n-(n-1)}{3} = \frac{3n}{3} - \frac{n-1}{3} = n - \frac{n-1}{3} \in \mathbb{N}$	1p
$\frac{3n+1}{4} = \frac{4n-n+1}{4} = \frac{4n-(n-1)}{4} = \frac{4n}{4} - \frac{n-1}{4} = n - \frac{n-1}{4} \in \mathbb{N}$	1p

$\frac{n-1}{3} \in \mathbb{N} \Rightarrow n-1=3p, p \in \mathbb{N}^* \quad (1)$	1p
$\frac{n-1}{4} \in \mathbb{N} \Rightarrow n-1=4q, q \in \mathbb{N}^* \quad (2)$	
Din (1), (2) și (3, 4) $\Rightarrow 12 \mid (n-1) \Rightarrow n-1=12k \Rightarrow n=12k+1, k \in \mathbb{N}$.	2p
Deci, $M = \{12k+1 \mid k \in \mathbb{N}\}$	

3. Pe prelungirile laturii BC a triunghiului ΔABC se iau punctele D și E astfel încât $B \in (DC)$, $(BD) \equiv (AB)$, iar $C \in (BE)$, $(CE) \equiv (AC)$. Dacă M și N sunt mijloacele segmentelor (AD) , respectiv (AE) și $BM \cap CN = \{P\}$, arătați că $(PD) \equiv (PE)$.

Gabriela Sascău, Rădăuți

Soluție. Din ipoteză avem: $(BD) \equiv (AB)$, $(MD) \equiv (MA)$, iar (MB) - latură comună $\Rightarrow \Delta ABM \equiv \Delta DBM$ (L.L.L.) $\Rightarrow \sphericalangle MBA \equiv \sphericalangle MBD \Rightarrow \sphericalangle PBA \equiv \sphericalangle PBD$ (suplementele lor) (1). Din ipoteză avem: $(BD) \equiv (AB)$, (PB) - latură comună și din (1) $\Rightarrow \Delta PBD \equiv \Delta PBA \Rightarrow (PD) \equiv (PA)$. Analog, $\Delta ACN \equiv \Delta ECN$ (L.L.L.) și $\Delta PCA \equiv \Delta PCE$ (L.U.L.) $\Rightarrow (PE) \equiv (PA)$, deci $(PD) \equiv (PE)$.

Barem.

Figura.....	1p
$(BD) \equiv (AB)$, $(MD) \equiv (MA)$, iar (MB) - latură comună $\Rightarrow \Delta ABM \equiv \Delta DBM$ (L.L.L.) $\Rightarrow \sphericalangle MBA \equiv \sphericalangle MBD \Rightarrow \sphericalangle PBA \equiv \sphericalangle PBD$ (suplementele lor) (1).....	1p
Din ipoteză avem: $(BD) \equiv (AB)$, (PB) - latură comună și din (1) $\Rightarrow \Delta PBD \equiv \Delta PBA$ (L.U.L.) (2).....	1p
Din (2) $\Rightarrow (PD) \equiv (PA)$ (3).....	1p
Analog, $\Delta ACN \equiv \Delta ECN$ (L.L.L.) și $\Delta PCA \equiv \Delta PCE$ (L.U.L.)	1p
$(PE) \equiv (PA)$ (4).....	1p
Din (3) și (4) $\Rightarrow (PD) \equiv (PE)$	1p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.