BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA a VII-a

1. Aflaţi numerele de două cifre $\overline{ab}$, cu $a<b$ astfel încât numărul $\sqrt{14(a+b)-\overline{ba}-\overline{ab}}\in\mathbb{N}$.

Veronica Petrasciuc, Solca

Soluţie: $14(a+b)-\overline{ba}-\overline{ab}=14a+14b-10b-a-10a-b=3a+3b=3(a+b)$.

$\sqrt{3(a+b)}\in\mathbb{N}\Rightarrow 3(a+b)$ este pătrat perfect, lucru ce se întâmplă doar pentru *a*+*b*=3 sau *a*+*b*=12. Cum *a*<*b*, $\Rightarrow(a,b)\in\{(1,2),(3,9),(4,8),(5,7)\}\Rightarrow\overline{ab}\in\{12,39,48,57\}$.

Barem

$14(a+b)-\overline{ba}-\overline{ab}=3(a+b)$	**2p**
$\sqrt{3(a+b)}\in\mathbb{N}\Rightarrow 3(a+b)$ este pătrat perfect	**2p**
a+*b*=3 sau *a*+*b*=12	**2p**
$(a,b)\in\{(1,2),(3,9),(4,8),(5,7)\}\Rightarrow\overline{ab}\in\{12,39,48,57\}$	**1p**

2. Fie mulțimea *A* cu proprietățile:

i) $x\in A\Rightarrow x\in\mathbb{Z}$ și $|x|\le 2012$;

ii) $x,y\in A\Rightarrow x^2+y^2 \vdots 11$.

a) Aflați cardinalul mulțimii *A*.

b) Determinați elementele mulțimii $B=\mathbb{Q}\cap\left\{\sqrt{|x|}\ /\ x\in A\right\}$.

Gabriela Bedrulea, Suceava

Soluție. a) $x\in\mathbb{Z}$ și $|x|\le 2012\Rightarrow x\in\{-2012,-2011,...,2011,2012\}$.

Dacă $x\in\mathbb{Z}$, atunci $x^2\in\{a\ /\ a=11k+r,\ r\in\{0,1,4,5,6,9\},\ k\in\mathbb{N}\}$ deci, din ii)$\Rightarrow x\in A\Leftrightarrow x\vdots 11$.

Obținem că $A=\{0,-11,11,-2\cdot 11,2\cdot 11,....-182\cdot 11,182\cdot 11\}$, deci $cardA=2\cdot 182+1=365$.

b) $\sqrt{|x|}\in\mathbb{Q}$ și $|x|\in\mathbb{N}\Rightarrow x$ este pătrat perfect, deci numerele din *B* sunt de forma $11^2\cdot k^2$, $0\le k\le\sqrt{\frac{182}{11}}$, *k* număr natural, deci $k^2\in\{0,1,4,9,16\}\Rightarrow B=\{0,121,484,1089,1936\}$.

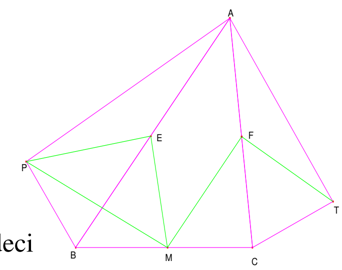
Barem.

a) $x\in\mathbb{Z}$ și $|x|\le 2012\Rightarrow x\in\{-2012,-2011,...,2011,2012\}$	**1p**
Dacă $x\in\mathbb{Z}$, atunci $x^2\in\{a\ /\ a=11k+r,\ r\in\{0,1,4,5,6,9\},\ k\in\mathbb{N}\}$ deci, din ii)$\Rightarrow x\in A\Leftrightarrow x\vdots 11$	**2p**
Obținem că $A=\{0,-11,11,-2\cdot 11,2\cdot 11,....-182\cdot 11,182\cdot 11\}$, deci $cardA=2\cdot 182+1=365$	**1p**
b) $\sqrt{|x|}\in\mathbb{Q}$ și $|x|\in\mathbb{N}\Rightarrow x$ este pătrat perfect, deci numerele din *B* sunt de forma $11^2\cdot k^2$, $0\le k\le\sqrt{\frac{182}{11}}$, *k* număr natural..	**2p**
$k^2\in\{0,1,4,9,16\}\Rightarrow B=\{0,121,484,1089,1936\}$	**1p**

3. În exteriorul triunghiului ascuțitunghic *ABC* se construiesc triunghiurile dreptunghice *ABP* și *ACT* cu ipotenuzele $[AB]$ și $[AC]$. Dacă unghiurile *PAB* și *TCA* sunt complementare iar *E*, *M*, *F* sunt mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, respectiv $[AC]$, să se arate că:

a) *AEMF* este paralelogram;

b) $[PM]\equiv[MT]$.



Soluție. a) $[ME]$ linie mijlocie în $\Delta ABC\Rightarrow ME\parallel AC$ și $ME=\frac{AC}{2}=AF$. Din $ME\parallel AF$ și $ME=AF$ rezultă *AEMF* este paralelogram.

b) $[PE]$ este mediană corespunzătoare ipotenuzei triunghiului dreptunghic *APB*, deci $PE=\frac{AB}{2}=EA=MF$. Analog $TF=\frac{AC}{2}=FA=ME$.

Unghiurile PAB și TCA sunt complementare $\Rightarrow \sphericalangle PAB \equiv \sphericalangle TAC \Rightarrow \sphericalangle PEB \equiv \sphericalangle TFC$ (unghiuri exterioare triunghiurilor isoscele PAE și TAF), dar $\sphericalangle BEM \equiv \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle CFM$ (corespondente) și atunci obținem $\sphericalangle PEM \equiv \sphericalangle TFM$ (sumă de unghiuri congruente).

Se obține $\Delta PEM \equiv \Delta MFT$ $(L.U.L) \Rightarrow [PM] \equiv [MT]$.

Barem.

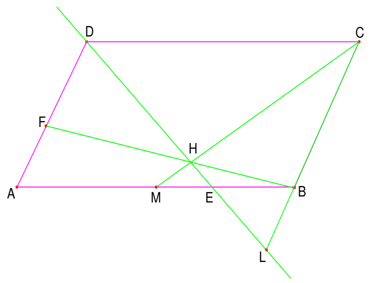
a) Figura	**1p**
$AEMF$ este paralelogram..	**1p**
b) $[PE]$ este mediana in triunghiul dreptunghic APB, deci $PE = \frac{AB}{2} = EA = MF$. Analog $TF = \frac{AC}{2} = FA = ME$	**2p**
Unghiurile PAB și TCA sunt complementare $\Rightarrow \sphericalangle PAB \equiv \sphericalangle TAC \Rightarrow \sphericalangle PEB \equiv \sphericalangle TFC$ (unghiuri exterioare triunghiurilor isoscele PAE și TAF), dar $\sphericalangle BEM \equiv \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle CFM$ (corespondente) și atunci obținem $\sphericalangle PEM \equiv \sphericalangle TFM$ (sumă de unghiuri congruente)..	**2p**
Se obtine $\Delta PEM \equiv \Delta MFT$ $(L.U.L) \Rightarrow [PM] \equiv [MT]$	**1p**

4. Fie $ABCD$ un paralelogram în care $AB > BC$ și $M \in (AB)$ astfel încât $MB = BC$. O dreaptă care trece prin D intersectează $[MB]$ în E și $[MC]$ în punctul H. Dacă $BH \cap AD = \{F\}$, $DH \cap CB = \{L\}$, demonstrați că:

a) $\frac{DH}{HL} = \frac{DC}{CL}$;

b) $\frac{DF}{BL} = \frac{DC}{CL}$;

c) $AF = ME$.



Soluție. a) $MB = BC \Rightarrow \sphericalangle BCM \equiv \sphericalangle BMC$,
dar $\sphericalangle BMC \equiv \sphericalangle DCM \Rightarrow \sphericalangle BCM \equiv \sphericalangle DCM$.

Aplicam teorema bisectoarei în $\Delta CDL \Rightarrow \frac{DH}{HL} = \frac{DC}{CL}$. (1)

b) Deoarece $LB \parallel FD \Rightarrow \Delta FDH \sim \Delta LBH \Rightarrow \frac{DH}{HL} = \frac{DF}{LB}$. (2) Din (1) și (2) obținem $\frac{DC}{LC} = \frac{DF}{LB}$ (3)

c) În ΔDCL, $EB \parallel DC \Rightarrow \Delta LBE \sim \Delta LCD \Rightarrow \frac{LB}{LC} = \frac{BE}{CD} = \frac{LE}{LD} \Rightarrow \frac{LB}{LC} = \frac{BE}{CD} \Rightarrow \frac{CD}{LC} = \frac{BE}{LB}$ care împreună cu (3) ne conduce la $\frac{BE}{LB} = \frac{DF}{LB} \Rightarrow BE = DF$. Dar $AF = AD - FD$, $ME = BM - BE$, $AD = BC = BM$ de unde obținem $AF = ME$ (diferență de segmente congruente).

Barem.

Figura	**1p**
a) $MB = BC \Rightarrow \sphericalangle BCM \equiv \sphericalangle BMC$, dar $\sphericalangle BMC \equiv \sphericalangle DCM \Rightarrow \sphericalangle BCM \equiv \sphericalangle DCM$	**1p**
Aplicam teorema bisectoarei în $\Delta CDL \Rightarrow \frac{DH}{HL} = \frac{DC}{CL}$. (1)...	**1p**
b) $LB \parallel FD \Rightarrow \Delta FDH \sim \Delta LBH \Rightarrow \frac{DH}{HL} = \frac{DF}{LB}$. (2)	**1p**
Din (1) și (2) obținem $\frac{DC}{LC} = \frac{DF}{LB}$ (3)..	**1p**
c) În ΔDCL, $EB \parallel DC \Rightarrow \Delta LBE \sim \Delta LCD \Rightarrow \frac{LB}{LC} = \frac{BE}{CD} = \frac{LE}{LD} \Rightarrow \frac{LB}{LC} = \frac{BE}{CD} \Rightarrow \frac{CD}{LC} = \frac{BE}{LB}$ care împreună cu (3) ne conduce la $\frac{BE}{LB} = \frac{DF}{LB} \Rightarrow BE = DF$	**1p**
Dar $AF = AD - FD$, $ME = BM - BE$, $AD = BC = BM$ de unde obținem $AF = ME$	**1p**

Notă:
Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.