BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA a VIII-a

1. a) Dacă a şi b sunt două numere întregi consecutive, calculaţi valoarea expresiei:

$$E(a,b)=a\left(a^2-a+1\right)-b\left(b^2+b+1\right)-ab(3a-3b-2).$$

b) Arătaţi că dacă $a,b,c\in(0;+\infty)$, atunci raportul $\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{ab^2c+bc^2a+ca^2b}$ nu poate fi subunitar.

GMB, supliment iunie 2009

Soluţie. a) $E(a,b)=(a-b)^3-(a-b)^2+a-b$. Din a şi b întregi consecutive avem $a-b\in\{-1;1\}$ şi $E(a,b)\in\{-3;1\}$.

b) Folosim inegalitatea $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$, valabilă pentru $x,y,z\in\mathbb{R}$ şi obţinem:

$$\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{ab^2c+bc^2a+ca^2b}\geq\frac{ab^2c+bc^2a+ca^2b}{ab^2c+bc^2a+cb^2a}=1.$$

Barem.

a) $E(a,b)=(a-b)^3-(a-b)^2+a-b$ ……………………………………………………………………..	**2p**
$a-b\in\{-1;1\}$, $E(a,b)\in\{-3;1\}$ ……………………………………………………………………...	**2p**
b) $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$ …………………………………………………………………………	**2p**
$\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{ab^2c+bc^2a+ca^2b}\geq\dfrac{ab^2c+bc^2a+ca^2b}{ab^2c+bc^2a+cb^2a}=1$ …………………………………………………………………	**1p**

2. Fie ecuaţia $2^{[x]+[y]+1}-9\cdot 2^{[x]}=2012$, cu $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, unde prin $[a]$ s-a notat partea întreagă a numărului real a.

a) Dovediţi că perechea $\left(2\sqrt{2}\ ;\ 8,3\right)$ este soluţie a ecuaţiei date.

b) Rezolvaţi ecuaţia pentru $x>0,\ y>0$;

c) arătaţi că pentru $x<0,\ y>0$ ecuaţia nu are soluţii.

Ecaterina Huluţă, Suceava

Soluţie. a) $\left[2\sqrt{2}\right]=2$, $[8,3]=8$, $2^{2+8+1}-9\cdot 2^2=2048-36=2012$.

b) $x>0,\ y>0$, $[x],[y]\in\mathbb{N}$, $2^{[x]}\left(2^{[y]+1}-9\right)=2^2\cdot 503\Rightarrow\begin{cases}[x]=2\\ [y]=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in[2;3)\\ y\in[8;9)\end{cases}\Rightarrow(x;y)\in[2;3)\times[8;9)$.

c) $x<0,\ y>0$, $[x]\in\mathbb{Z}_-$, $[y]\in\mathbb{N}$, scriem $2^{[y]+1}-9=2^{2-[x]}\cdot 503$, cu $2-[x]\in\mathbb{N}^*$.

Cum $\left(2^{[y]+1}-9\right)\not\vdots\, 2$ iar $\left(2^{2-[x]}\cdot 503\right)\vdots\, 2$, pentru orice $x<0,\ y>0$, rezultă ecuația dată nu are soluții.

Barem.

a) $\left[2\sqrt{2}\right]=2$, $[8,3]=8$, $2^{2+8+1}-9\cdot 2^2=2048-36=2012$ …………………………………………………………...	**2p**
b) $x>0,\ y>0$, $[x],[y]\in\mathbb{N}$, $2^{[x]}\left(2^{[y]+1}-9\right)=2^2\cdot 503\Rightarrow\begin{cases}[x]=2\\ [y]=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in[2;3)\\ y\in[8;9)\end{cases}\Rightarrow(x;y)\in[2;3)\times[8;9)$ ……………..	**2p**
c) $x<0,\ y>0$, $[x]\in\mathbb{Z}_-$, $[y]\in\mathbb{N}$, scriem $2^{[y]+1}-9=2^{2-[x]}\cdot 503$, cu $2-[x]\in\mathbb{N}^*$ …………………………………...	**2p**
Finalizare……………………………………………………………………………………………………….	**1p**

3. Fie un cub $ABCDA'B'C'D'$, având muchia a şi se consideră mijloacele M, N, P ale muchiilor $[AB]$, $[C'D']$, respectiv $[AD]$. Să se afle:

a) aria triunghiului MNP; **b)** sinusul măsurii unghiului planelor (MNP) şi (ABC).

***

Soluţie. a) Dacă punctul Q este mijlocul muchiei $[CD]$, laturile triunghiului MNP au lungimile $MP=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $MN=a\sqrt{2}$, $NP=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Cum $MP^2+PN^2=MN^2$, $m(\sphericalangle MPN)=90^\circ$, $S_{MNP}=\dfrac{PM\cdot PN}{2}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

b) Cum $(NPM)\cap(ABC)=PM$, $NP\perp PM$, $NP\subset(NPM)$, $QP\perp PM$, $QP\subset(ABC)$, atunci:

$\left(\widehat{(NPM),(ABC)}\right)=\widehat{NPQ}$ şi avem în ΔNQP drept în Q: $\sin NPQ=\dfrac{NQ}{PN}=\dfrac{a}{\frac{a\sqrt{6}}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Barem.

Figură...	**1p**
$MP=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $MN=a\sqrt{2}$, $NP=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$	**2p**
$MP^2+PN^2=MN^2$, $m(\sphericalangle MPN)=90^\circ$	**1p**
$S_{MNP}=\dfrac{PM\cdot PN}{2}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$	**1p**
b) unghiul plan corespunzător este $\sphericalangle NPQ$ şi $\sin NPQ=\dfrac{NQ}{PN}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$	**2p**

4. Pe planul triunghiului echilateral ABC de latura $4\sqrt{2}$ se ridică perpendiculara SC, $SC=2$. Dacă D este mijlocul muchiei $[AB]$, iar E este mijlocul muchiei $[BC]$, aflaţi:

a) măsura unghiului dintre dreptele SE şi CD; **b)** distanţa dintre dreptele SE şi CD.

***

Soluţie. a) Construim prin punctul E paralela la CD, aceasta intersectează AB în M, unghiul determinat de dreptele SE şi CD este unghiul determinat de dreptele SE şi ME. Din $CF\perp ME$ şi $SC\perp(ABC)$, conform teoremei celor trei perpendiculare obţinem $SF\perp ME$, triunghiul SEF este dreptunghic în F deci vom avea: $m(\sphericalangle SE,CD)=m(\sphericalangle SE,ME)=m(\sphericalangle SEF)$. Patrulaterul $CDMF$ este dreptunghi $CF=DM=AB/4=\sqrt{2}$, iar $EF=CD/2=\sqrt{6}$. În ΔSFC, $SF=\sqrt{6}$, triunghiul SEF este dreptunghic isoscel, unghiul măsoară 45°.

b) Dacă o dreaptă este paralelă cu un plan, distanţa dintre ea şi orice dreaptă a planului care nu este paralelă cu ea este distanţa de la orice punct al ei la plan.

$CD\parallel(SEF)$, $d(CD,(SEF))=d(C,(SEF))=d(C,SF)=\dfrac{CF\cdot CS}{SF}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Barem.

Figura	**1p**
Construim prin punctul E paralela la CD, aceasta intersectează AB în M, unghiul determinat de dreptele SE şi CD este unghiul determinat de dreptele SE şi ME..	**1p**
$CF\perp ME$, (T 3 $\perp$), $SF\perp ME$, $m(\sphericalangle SE,CD)=m(\sphericalangle SE,ME)=m(\sphericalangle SEF)$	**1p**
Calcul, ΔSEF este dreptunghic isoscel, unghiul măsoară 45°	**2p**
$CD\parallel(SEF)$, $d(CD,(SEF))=d(C,(SEF))=d(C,SF)=\dfrac{CF\cdot CS}{SF}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$	**2p**

Notă:

Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.