

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a VIII-a

1. a) Dacă a și b sunt două numere întregi consecutive, calculați valoarea expresiei:

$$E(a,b) = a(a^2 - a + 1) - b(b^2 + b + 1) - ab(3a - 3b - 2).$$

b) Arătați că dacă $a, b, c \in (0; +\infty)$, atunci raportul $\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{ab^2c + bc^2a + ca^2b}$ nu poate fi subunitar.

GMB, supliment iunie 2009

Soluție. a) $E(a,b) = (a-b)^3 - (a-b)^2 + a - b$. Din a și b întregi consecutive avem $a-b \in \{-1; 1\}$ și $E(a,b) \in \{-3; 1\}$.

b) Folosim inegalitatea $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$, valabilă pentru $x, y, z \in \mathbb{R}$ și obținem:

$$\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{ab^2c + bc^2a + ca^2b} \geq \frac{ab^2c + bc^2a + ca^2b}{ab^2c + bc^2a + ca^2b} = 1.$$

Barem.

| | |
|---|-----------|
| a) $E(a,b) = (a-b)^3 - (a-b)^2 + a - b$ | 2p |
| $a-b \in \{-1; 1\}$, $E(a,b) \in \{-3; 1\}$ | 2p |
| b) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ | 2p |
| $\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{ab^2c + bc^2a + ca^2b} \geq \frac{ab^2c + bc^2a + ca^2b}{ab^2c + bc^2a + ca^2b} = 1$ | 1p |

2. Fie ecuația $2^{[x]+[y]+1} - 9 \cdot 2^{[x]} = 2012$, cu $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, unde prin $[a]$ s-a notat partea întreagă a numărului real a .

a) Dovediți că perechea $(2\sqrt{2}; 8, 3)$ este soluție a ecuației date.

b) Rezolvați ecuația pentru $x > 0, y > 0$;

c) arătați că pentru $x < 0, y > 0$ ecuația nu are soluții.

Ecaterina Huluiță, Suceava

Soluție. a) $[2\sqrt{2}] = 2, [8, 3] = 8, 2^{2+8+1} - 9 \cdot 2^2 = 2048 - 36 = 2012$.

b) $x > 0, y > 0, [x], [y] \in \mathbb{N}, 2^{[x]}(2^{[y]+1} - 9) = 2^2 \cdot 503 \Rightarrow \begin{cases} [x] = 2 \\ [y] = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [2; 3) \\ y \in [8; 9) \end{cases} \Rightarrow (x, y) \in [2; 3) \times [8; 9)$.

c) $x < 0, y > 0, [x] \in \mathbb{Z}_-, [y] \in \mathbb{N}$, scriem $2^{[y]+1} - 9 = 2^{-[x]} \cdot 503$, cu $2 - [x] \in \mathbb{N}^*$.

Cum $(2^{[y]+1} - 9) \not\equiv 2$ iar $(2^{-[x]} \cdot 503) \equiv 2$, pentru orice $x < 0, y > 0$, rezultă ecuația dată nu are soluții.

Barem.

| | |
|--|-----------|
| a) $[2\sqrt{2}] = 2, [8, 3] = 8, 2^{2+8+1} - 9 \cdot 2^2 = 2048 - 36 = 2012$ | 2p |
| b) $x > 0, y > 0, [x], [y] \in \mathbb{N}, 2^{[x]}(2^{[y]+1} - 9) = 2^2 \cdot 503 \Rightarrow \begin{cases} [x] = 2 \\ [y] = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [2; 3) \\ y \in [8; 9) \end{cases} \Rightarrow (x, y) \in [2; 3) \times [8; 9)$ | 2p |
| c) $x < 0, y > 0, [x] \in \mathbb{Z}_-, [y] \in \mathbb{N}$, scriem $2^{[y]+1} - 9 = 2^{-[x]} \cdot 503$, cu $2 - [x] \in \mathbb{N}^*$ | 2p |
| Finalizare | 1p |

3. Fie un cub $ABCD A'B'C'D'$, având muchia a și se consideră mijloacele M, N, P ale muchiilor $[AB], [C'D']$, respectiv $[AD]$. Să se afle:

a) aria triunghiului MNP ; b) sinusul măsurii unghiului planelor (MNP) și (ABC) .

Soluție. a) Dacă punctul Q este mijlocul muchiei $[CD]$, laturile triunghiului MNP au lungimile $MP = \frac{a\sqrt{2}}{2}$,

$$MN = a\sqrt{2}, NP = \frac{a\sqrt{6}}{2}. \text{ Cum } MP^2 + PN^2 = MN^2, m(\sphericalangle MPN) = 90^\circ, S_{MNP} = \frac{PM \cdot PN}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

b) Cum $(NPM) \cap (ABC) = PM$, $NP \perp PM$, $NP \subset (NPM)$, $QP \perp PM$, $QP \subset (ABC)$, atunci:

$$\widehat{(NPM), (ABC)} = \widehat{NPQ} \text{ și avem în } \triangle NPQ \text{ drept în } Q: \sin NPQ = \frac{NQ}{PN} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Barem.

| | |
|---|----|
| Figură..... | 1p |
| $MP = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $MN = a\sqrt{2}$, $NP = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ | 2p |
| $MP^2 + PN^2 = MN^2$, $m(\sphericalangle MPN) = 90^\circ$ | 1p |
| $S_{MNP} = \frac{PM \cdot PN}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ | 1p |
| b) unghiul plan corespunzător este $\sphericalangle NPQ$ și $\sin NPQ = \frac{NQ}{PN} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ | 2p |

4. Pe planul triunghiului echilateral ABC de latura $4\sqrt{2}$ se ridică perpendiculara SC , $SC = 2$. Dacă D este mijlocul muchiei $[AB]$, iar E este mijlocul muchiei $[BC]$, aflați:

a) măsura unghiului dintre dreptele SE și CD ; b) distanța dintre dreptele SE și CD .

Soluție. a) Construim prin punctul E paralela la CD , aceasta intersectează AB în M , unghiul determinat de dreptele SE și CD este unghiul determinat de dreptele SE și ME . Din $CF \perp ME$ și $SC \perp (ABC)$, conform teoremei celor trei perpendiculare obținem $SF \perp ME$, triunghiul SEF este dreptunghic în F deci vom avea:

$m(\sphericalangle SE, CD) = m(\sphericalangle SE, ME) = m(\sphericalangle SEF)$. Patrulaterul $CDMF$ este dreptunghi $CF = DM = AB/4 = \sqrt{2}$, iar

$EF = CD/2 = \sqrt{6}$. În $\triangle SFC$, $SF = \sqrt{6}$, triunghiul SEF este dreptunghic isoscel, unghiul măsoară 45° .

b) Dacă o dreaptă este paralelă cu un plan, distanța dintre ea și orice dreaptă a planului care nu este paralelă cu ea este distanța de la orice punct al ei la plan.

$$CD \parallel (SEF), d(CD, (SEF)) = d(C, (SEF)) = d(C, SF) = \frac{CF \cdot CS}{SF} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Barem.

| | |
|--|----|
| Figura | 1p |
| Construim prin punctul E paralela la CD , aceasta intersectează AB în M , unghiul determinat de dreptele SE și CD este unghiul determinat de dreptele SE și ME | 1p |
| $CF \perp ME$, $(T3 \perp)$, $SF \perp ME$, $m(\sphericalangle SE, CD) = m(\sphericalangle SE, ME) = m(\sphericalangle SEF)$ | 1p |
| Calcul, $\triangle SEF$ este dreptunghic isoscel, unghiul măsoară 45° | 2p |
| $CD \parallel (SEF)$, $d(CD, (SEF)) = d(C, (SEF)) = d(C, SF) = \frac{CF \cdot CS}{SF} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ | 2p |

Notă:

Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.