INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CONSTANȚA

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală – Constanța, 18 februarie 2012

Clasa a XI a

Subiectul 1

Fie $A, B, C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ şi $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ cu $\omega^3 = -1$.

a) Să se arate că funcția $f(x) = det(Ax + B) - det(Ax + C)$ este de forma $ax^2 + bx + c \;\; cu \;\; a, b, c \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că dacă $det(A - \omega B) = det(A - \omega C)$ atunci $det(A + B) - det(A + C) = detB - detC$.

Prof. Gheorghe Andrei

Subiectul 2

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi $B = A - {}^tA$. Arătați că $(\forall)\alpha \in \mathbb{R}\ și\ (\forall)k \in \mathbb{N}$,

$$det(I_n + \alpha B^{4k+2}) \geq 0$$

Prof. Cătălin Zîrnă

Subiectul 3

Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}\ cu\ a \in \mathbb{R}^*, x_1 \in \mathbb{R}^*$ dat de: $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{a^2}{x_n}\right), (\forall)n \geq 1$.

Arătați că $(x_n)_{n\geq 1}$ nu are limită în $\overline{\mathbb{R}}$.

Prof. Dorin Arventiev

Subiectul 4

Fie şirul

$$x_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left\{\sqrt{n^2 + k}\right\}, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

unde $\{\cdot\}$ este funcția parte fracționară.

a) Calculați:

$$\lim_{n\to\infty} x_n$$

b) Calculați:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(x_n - \frac{1}{4}\right)$$

Prof. Nelu Chichirim

Notă:
Timp de lucru 3 ore. Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7. Nu se acordă puncte din oficiu.