Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti
PROBĂ DE DEPARTAJARE Martie 2012

CLASA a VIII-a – Barem

Problema 1. a) Arătaţi că pentru orice număr $x \in (0,1]$ avem

$$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}<\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}.$$

b) Demonstraţi, fără a extrage rădăcina pătrată şi fără a ridica la pătrat că

$$\sqrt{101}>10,049875$$

Soluţie şi barem. a) Ridicarea la pătrat .... 1 punct
Justificarea inegalităţii din dreapta .... 1 punct
Justificarea inegalităţii din stânga ....1 punct
b) Scrierea $\sqrt{101}=10\sqrt{1+\frac{1}{100}}$ ....2 puncte
Folosirea inegalităţii de la a) şi calculul .... 2 puncte

Problema 2. a) Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub (cu muchiile verticale AA', BB', CC', DD'). Arătaţi că unghiul dintre planele $(AB'D')$ şi $(A'BD)$ este obtuz.

b) Detreminaţi poziţia unei drepte d din planul $A'B'C'D'$ astfel ca planele (A,d) şi $(A'BD)$ să fie perpendiculare.

Soluţie şi barem. a) Considerarea secţiunii $ACC'A'$ (sau a uneia similare)..1 punct

Dacă M este mijlocul laturii AC şi N al laturii $A'C'$ în dreptungiul $ACC'A'$, unghiul diedru din problemă este unghiul dintre dreptele $A'M$ şi AN.. 1 punct

Calculul unor funcţii trigonometrice în triunghiul format de AA', AN şi $A'M$ (sau lungimi de laturi) şi argumentarea cu acestea a faptului că unghiul în cauză este obtuz..1 punct

b) Demonstrarea faptului că dreptele AC' şi $A'M$ sunt perpendiculare 2 puncte

Deducerea că dreapta d trece prin C' şi este paralelă cu $B'D'$ . . 1 punct

Problema 3. Câte soluţii are ecuaţia

$$||||x-1|-1|-1|-1|=1?$$

Soluţie şi barem. Ecuaţia este echivalentă cu $|||x-1|-1|-1|-1=\pm 1$. 2 puncte

Rezultă $|||x-1|-1|-1|=0$ sau $|||x-1|-1|-1|=2$ .... 1 punct

Discutarea fiecărui caz până la final cu aceeaşi metodă ... 2 puncte +2 puncte

....

Problema 4. Arătaţi că pentru n număr natural impar, $n \geq 3$, sistemul

$$\begin{aligned} \sqrt{x_1^2+5}+x_2 &= 5 \\ \sqrt{x_2^2+5}+x_3 &= 5 \\ \cdots\cdots\cdots & \quad \cdots \\ \sqrt{x_n^2+5}+x_1 &= 5 \end{aligned}$$

are o unică soluţie formată din numere reale pozitive.

Soluţie şi barem. $x_1=x_2=\cdots=x_n=2$ este soluţie .... 1 punct

Presupunem că, de exemplu $x_1>2$. Atunci $x_2<2$ şi din a doua ecuaţie $_3>2$. Din faptul că n este impar deducem $x_1<2$, absurd .... 4 puncte

Din simetrie celelalte cazuri se tratează la fel .... 2 puncte