LICEUL TEORETIC „AL.MARGHILOMAN"

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ
EREMIA GEORGESCU-BUZĂU

Ediția a II-a

17 decembrie 2011

Filiala Buzău a SSM din România

Clasa a IX-a M1

SUBIECTUL I

În triunghiul ABC, fie $D \in (BC), E \in (CA), F \in (AB)$ astfel încât $\frac{BD}{DC}=\alpha, \frac{CE}{EA}=\beta, \frac{AF}{FB}=\gamma.$

Atunci: $\vec{AD}+\vec{BE}+\vec{CF}=\vec{0}$ dacă şi numai dacă $\alpha=\beta=\gamma.$

Barem de corectare

Avem:

$$\vec{AD}+\vec{BE}+\vec{CF}=\vec{0} \Leftrightarrow \frac{\vec{AB}+\alpha\vec{AC}}{1+\alpha}+\frac{\vec{BC}+\beta\vec{BA}}{1+\beta}+\frac{\vec{CA}+\gamma\vec{CB}}{1+\gamma}=\vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\vec{AB}-\alpha\vec{CA}}{1+\alpha}+\frac{\vec{BC}-\beta\vec{AB}}{1+\beta}+\frac{\vec{CA}-\gamma\vec{BC}}{1+\gamma}=\vec{0} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2p$$

Deoarece

$\vec{CA}=-\vec{AB}-\vec{BC}$, avem:……………………………………………………………1p

$$\left(\frac{1}{1+\alpha}-\frac{\beta}{1+\beta}+\frac{\alpha}{1+\alpha}-\frac{1}{1+\gamma}\right)\vec{AB}+\left(\frac{1}{1+\beta}-\frac{\gamma}{1+\gamma}+\frac{\alpha}{1+\alpha}-\frac{1}{1+\gamma}\right)\vec{BC}=\vec{0} \Leftrightarrow \ldots \quad \ldots\ldots\ldots 2p$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{1+\gamma}+\frac{\beta}{1+\beta}=1 \\ \frac{\alpha}{1+\alpha}+\frac{1}{1+\beta}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma=\beta \\ \alpha=\beta \end{cases} \Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2p$$

SUBIECTUL II

a) Fie numerele $x, y \in \mathbf{R}$ astfel încât $x+y \in \mathbf{R} \setminus \{-1;0\}$.

Demonstrați că $\frac{1}{x+y}=\frac{1}{x+y+1}+\frac{1}{x^2+x+2xy+y^2+y}$

b) Demonstrați că pentru orice $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 3$, există numerele $a_1,a_2,a_3,...,a_n\in\mathbf{N}^*$, distincte două câte două, astfel încât $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_n}=1$

Barem de corectare

a) $\frac{1}{x+y}=\frac{1}{x+y+1}+\frac{1}{x^2+x+2xy+y^2+y}\Leftrightarrow\frac{1}{x+y}=\frac{1}{x+y+1}+\frac{1}{(x+y)(x+y+1)}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+y+1=(x+y)+1$ adevărat ....(1p)

b) Demonstrație prin inducție matematică.

Notăm $P(n)$: ” $\exists\, a_1,a_2,a_3,...,a_n\in\mathbf{N}^*$, distincte, a.î.
$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_n}=1$”...(0,5p)

Etapa I. $P(3)$: ” $\exists\, a_1,a_2,a_3\in\mathbf{N}^*$, distincte, a.î. $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}=1$” este adevărată, observând că $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$ ....(1p)

Etapa II. Demonstrăm că $\forall\, k\in\mathbf{N}$, $k\geq 3$, are loc implicația $P(k)\Rightarrow P(k+1)$.

Fie $k\in\mathbf{N}$, $k\geq 3$. Presupunem că $P(k)$ este adevărată, adică ” $\exists\, a_1,a_2,a_3,...,a_k\in\mathbf{N}^*$, distincte, a.î. $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_k}=1$”. Vrem să demonstrăm că $P(k+1)$ este adevărată, adică

” $\exists\, b_1,b_2,b_3,...,b_{k+1}\in\mathbf{N}^*$, distincte, a.î. $\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_3}+...+\frac{1}{b_{k+1}}=1$” ....(0,5p)

Fără a restrânge generalitatea, putem presupune $a_1<a_2<a_3<...<a_k$. Observăm că fracția $\frac{1}{a_k}$ poate fi scrisă în forma $\frac{1}{a_k+1}+\frac{1}{a_k(a_k+1)}$ (*), conform cu a), luând $x=a_k$, $y=0$. ....(1p)

Construim

$b_1 = a_1, b_2 = a_2, ..., b_{k-1} = a_{k-1}, b_k = a_k + 1, b_{k+1} = a_k(a_k + 1)$ ....(1p)

Observăm că $b_1 < b_2 < b_3 < ... < b_{k-1} < b_k < b_{k+1}$, deci $b_1, b_2, b_3, ..., b_{k+1} \in \mathbf{N}^*$ sunt distincte ....(1p)

$$\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+...+\frac{1}{b_{k-1}}+\frac{1}{b_k}+\frac{1}{b_{k+1}}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_{k-1}}+\left(\frac{1}{a_k+1}+\frac{1}{a_k(a_k+1)}\right)=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_k}=1$$

……………………………………………………………………………….(1p)

SUBIECTUL III

Să se calculeze minimul expresiei $4ab+\frac{1}{ab}$ ştiind că $a,b \in (0,\infty)$ şi $2a+5(b+1)=6$. Precizați valorile lui a şi b pentru care este atins acest minim.

Barem de corectare

Din relația $2a+5(b+1)=6$ obținem $2a+5b=1-2ab$. ……………………..(1p)

Cum $(2a+5b)^2 \ge 4\cdot 2a\cdot 5b = 40ab$ ………………………………………..………. (2p)

rezultă $(1-2ab)^2 \ge 40ab$ ……………………………………………………….…. (1p)

de unde $4ab+\frac{1}{ab} \ge 44$ …..…………………………………………………….…. (1p)

Minimul 44 se obține pentru $2a=5b=k$, cu $k+5\left(\frac{k}{5}+1\right)=6$, ……………….. (1p)

adică pentru $k=\sqrt{30}-5$, $a=\frac{\sqrt{30}-5}{2}$, $b=\frac{\sqrt{30}-5}{5}$ ……………………………… (1p)