



**Clasa a IX-a M1**

**SUBIECTUL I**

În triunghiul ABC, fie  $D \in (BC), E \in (CA), F \in (AB)$  astfel încât  $\frac{BD}{DC} = \alpha, \frac{CE}{EA} = \beta, \frac{AF}{FB} = \gamma$ .

Atunci:  $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \vec{0}$  dacă și numai dacă  $\alpha = \beta = \gamma$ .

*Barem de corectare*

Avem:

$$\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{\vec{AB} + \alpha \vec{AC}}{1 + \alpha} + \frac{\vec{BC} + \beta \vec{BA}}{1 + \beta} + \frac{\vec{CA} + \gamma \vec{CB}}{1 + \gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\vec{AB} - \alpha \vec{CA}}{1 + \alpha} + \frac{\vec{BC} - \beta \vec{AB}}{1 + \beta} + \frac{\vec{CA} - \gamma \vec{BC}}{1 + \gamma} = \vec{0} \dots \dots \dots 2p$$

Deoarece

$\vec{CA} = -\vec{AC} = -\vec{AB} - \vec{BC}$ , avem:  $\dots \dots \dots 1p$

$$\left( \frac{1}{1 + \alpha} - \frac{\beta}{1 + \beta} + \frac{\alpha}{1 + \alpha} - \frac{1}{1 + \gamma} \right) \vec{AB} + \left( \frac{1}{1 + \beta} - \frac{\gamma}{1 + \gamma} + \frac{\alpha}{1 + \alpha} - \frac{1}{1 + \gamma} \right) \vec{BC} = \vec{0} \Leftrightarrow \dots \dots \dots 2p$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{1 + \gamma} + \frac{\beta}{1 + \beta} = 1 \\ \frac{\alpha}{1 + \alpha} + \frac{1}{1 + \beta} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = \beta \\ \alpha = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma \dots \dots \dots 2p$$

**SUBIECTUL II**

a) Fie numerele  $x, y \in \mathbf{R}$  astfel încât  $x + y \in \mathbf{R} \setminus \{-1; 0\}$ .

Demonstrați că  $\frac{1}{x + y} = \frac{1}{x + y + 1} + \frac{1}{x^2 + x + 2xy + y^2 + y}$



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ  
EREMIA GEORGESCU-BUZĂU



Ediția a II-a

17 decembrie 2011

LICEUL TEORETIC  
AL MARGHILOMAN

Filiala Buzău  
a SSM din  
România

b) Demonstrați că pentru orice  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 3$ , există numerele  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbf{N}^*$ ,  
distincte două câte două, astfel încât  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} = 1$

Barem de corectare

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{1}{x+y} &= \frac{1}{x+y+1} + \frac{1}{x^2+x+2xy+y^2+y} \Leftrightarrow \frac{1}{x+y} = \frac{1}{x+y+1} + \frac{1}{x+y} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x+y+1 = x+y+1 \text{ adevărat } \dots\dots\dots(1p) \end{aligned}$$

b) Demonstrație prin inducție matematică.

Notăm  $P_n$  : ”  $\exists a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbf{N}^*$ , distincte, a.î.

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} = 1 \text{ ” } \dots\dots\dots(0,5p)$$

Etapa I.  $P_3$  : ”  $\exists a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{N}^*$ , distincte, a.î.  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = 1$ ” este adevărată,

observând că  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1 \dots\dots\dots(1p)$

Etapa II. Demonstrăm că  $\forall k \in \mathbf{N}$ ,  $k \geq 3$ , are loc implicația  $P_k \Rightarrow P_{k+1}$ .

Fie  $k \in \mathbf{N}$ ,  $k \geq 3$ . Presupunem că  $P_k$  este adevărată, adică ”  $\exists a_1, a_2, a_3, \dots, a_k \in \mathbf{N}^*$ ,

distincte, a.î.  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_k} = 1$ ”. Vrem să demonstrăm că  $P_{k+1}$  este

adevărată, adică

$$\text{” } \exists b_1, b_2, b_3, \dots, b_{k+1} \in \mathbf{N}^*, \text{ distincte, a.î. } \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} + \dots + \frac{1}{b_{k+1}} = 1 \text{ ” } \dots\dots\dots(0,5p)$$

Fără a restrânge generalitatea, putem presupune  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_k$ . Observăm că

fracția  $\frac{1}{a_k}$  poate fi scrisă în forma  $\frac{1}{a_k+1} + \frac{1}{a_k(a_k+1)}$  (\*), conform cu a), luând

$$x = a_k, y = 0. \dots\dots\dots(1p)$$



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ  
EREMIA GEORGESCU-BUZĂU



Ediția a II-a

17 decembrie 2011

Filiala Buzău  
a SSM din  
România

LICEUL TEORETIC  
"AL. MARGHILOMAN"

Construim

$$b_1 = a_1, b_2 = a_2, \dots, b_{k-1} = a_{k-1}, b_k = a_k + 1, b_{k+1} = a_k \quad a_k + 1 \dots \dots \dots (1p)$$

Observăm că  $b_1 < b_2 < b_3 < \dots < b_{k-1} < b_k < b_{k+1}$ , deci  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{k+1} \in \mathbf{N}^*$  sunt distincte

.....(1p)

$$\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_{k-1}} + \frac{1}{b_k} + \frac{1}{b_{k+1}} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{k-1}} + \left( \frac{1}{a_k + 1} + \frac{1}{a_k} \right) = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k} = 1$$

.....(1p)

**SUBIECTUL III**

Să se calculeze minimul expresiei  $4ab + \frac{1}{ab}$  știind că  $a, b \in ]0, \infty[$  și

$$2a + 5b + 1 = 6. \text{ Precizați valorile lui } a \text{ și } b \text{ pentru care este atins acest minim.}$$

*Barem de corectare*

Din relația  $2a + 5b + 1 = 6$  obținem  $2a + 5b = 1 - 2ab$ . .....(1p)

Cum  $2a + 5b \geq 2 \cdot 2a \cdot 5b = 40ab$  ..... (2p)

rezultă  $1 - 2ab \geq 40ab$  ..... (1p)

de unde  $4ab + \frac{1}{ab} \geq 44$  ..... (1p)

Minimul 44 se obține pentru  $2a = 5b = k$ , cu  $k + 5 \left( \frac{k}{5} + 1 \right) = 6$ , ..... (1p)

adică pentru  $k = \sqrt{30} - 5$ ,  $a = \frac{\sqrt{30} - 5}{2}$ ,  $b = \frac{\sqrt{30} - 5}{5}$  ..... (1p)