

CLASA A VIII

SOLUȚII

I. a) $\sqrt{x^2+9} \geq 3$ (1p)

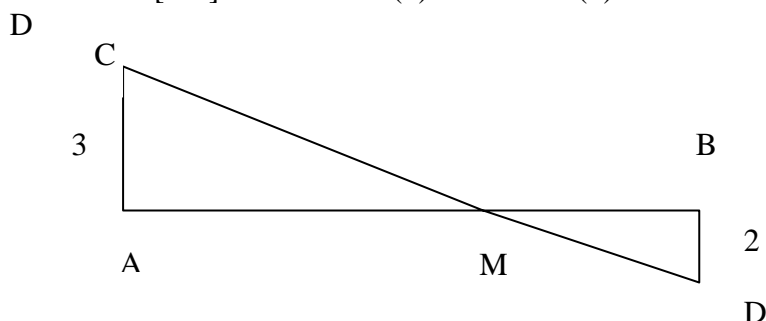
$$\sqrt{y^2-8y+20} = \sqrt{(y-4)^2+2^2} \geq 2 \quad (1p)$$

$$\Rightarrow E(x,y) \geq 3+2=5 \Rightarrow \min E(x,y)=5 \quad (1p)$$

b) $E(x) = \sqrt{x^2+9} + \sqrt{x^2-8x+20} = \sqrt{x^2+9} + \sqrt{(x-4)^2+2^2}$

Consideăm $[AB]$ de lungime 4 (u); iar pe dreapta AB se iau perpendicularele AC și BD de o parte și de alta a dreptei AB , de lungime 3 (u) și respectiv 2(u). (1p)

Fie $M \in [AB]$ unde $AM = x(u)$ și $MB = 4-x(u)$.



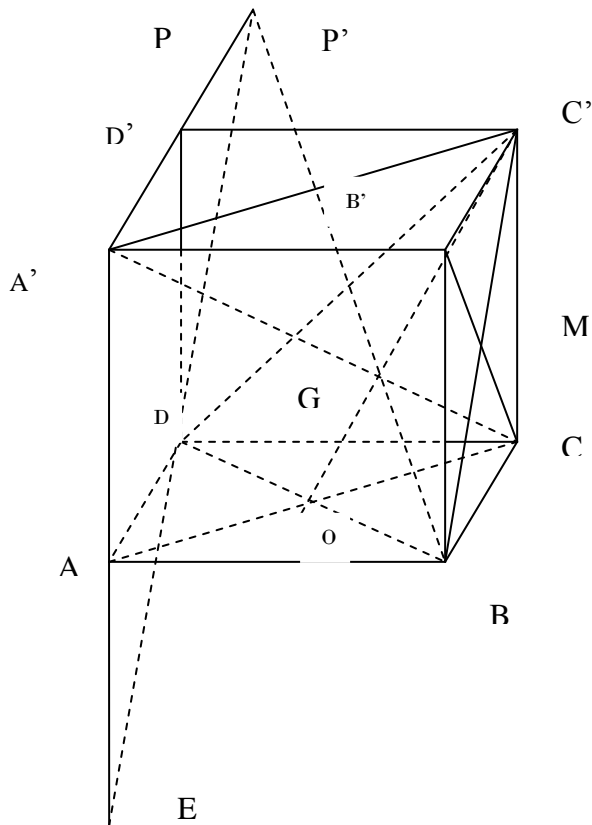
$$\begin{aligned} \Delta ACM : m(A) &= 90^\circ & CM &= \sqrt{x^2+9} \\ \Delta BMD : m(B) &= 90^\circ & MD &= \sqrt{(4-x)^2+4} \end{aligned}$$

$CM+MD = \text{minima}$ daca $M \in (CD)$ (1p)

$$\Rightarrow \Delta CAM \sim \Delta DBM \quad (AC \parallel BD) \Rightarrow \frac{AC}{BD} = \frac{AM}{BM} \quad \frac{3}{2} = \frac{X}{4-X} \Rightarrow X = \frac{12}{5} \quad (1p)$$

$$E\left(\frac{12}{5}\right) = \sqrt{\frac{144}{25}+9} + \sqrt{\left(4-\frac{12}{5}\right)^2+4} = \sqrt{41} \quad (1p)$$

II.



a) $A'C' \parallel OC \Rightarrow \triangle GOC \sim \triangle GC'A' \Rightarrow \frac{GO}{GC'} = \frac{OC}{A'C'} = \frac{1}{2}$ si cum $(C'O)$ este mediana in \triangle

$C'BD \Rightarrow$ ca G este centrul de greutate al $\triangle C'BD$ **(2p)**

$\Rightarrow DG \cap C'B = \{M\}$, M mijlocul $[BC'] \Rightarrow$ M si mijlocul segmentului $B'C$. **(1p)**

b) $BG \subset (BC, D'A')$ si fie $BG \cap A'D' = \{P\}$

$\triangle GBC \sim \triangle GPA' \Rightarrow \frac{BC}{PA'} = \frac{GC}{GA'} = \frac{1}{2} \Rightarrow P$ este simetricul lui A' fata de D' (1) **(2p)**

$ED \subset (AD, A'D')$ si fie $ED \cap A'D' = \{P'\}$

$AD \parallel A'P'$ si cum A este mijlocul $[A'E] \Rightarrow [AD]$ este linie mijlocie in $\triangle EA'P' \Rightarrow A'P' = 2AD$
 $\Rightarrow P'$ este simetricul lui A' fata de D' (2)

Din (1) si (2) $\Rightarrow P = P' \Rightarrow PG$ si ED sunt concurente deci coplanare. **(2p)**

III. Fie $s=x+y+z$. Conform inegalității mediilor avem:

$$\sqrt{\frac{y+z}{x}} \leq \frac{\frac{y+z}{x} + 1}{2} = \frac{x+y+z}{2x} = \frac{s}{2x} \text{ adică } \sqrt{\frac{x}{y+z}} \geq \frac{2x}{s} \text{ și analog obținem:}$$

$$\sqrt{\frac{y}{z+x}} \geq \frac{2y}{s}, \quad \sqrt{\frac{z}{x+y}} \geq \frac{2z}{s} \quad \text{de unde deducem ca:}$$

$$\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} \geq \frac{2(x+y+z)}{s} = \frac{2s}{s} = 2 \text{ ceea ce demonstrează inegalitatea din enunț.}$$