CLASA A VIII

SOLUȚII

I. **a)** $\sqrt{x^2+9} \geq 3$ **(1p)**

$\sqrt{y^2-8y+20} = \sqrt{(y-4)^2+2^2} \geq 2$ **(1p)**

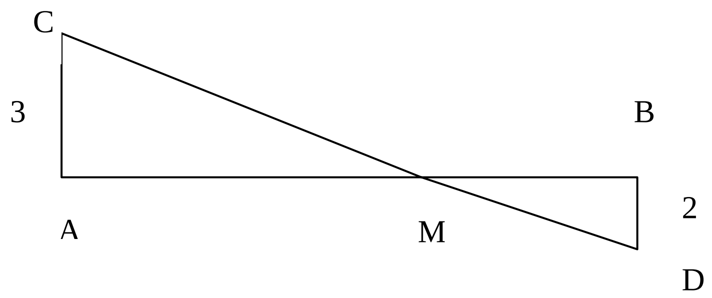
$\Rightarrow E(x,y) \geq 3+2=5 \Rightarrow$ min E(x,y)=5 **(1p)**

b) E(x)=$\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-8x+20} = \sqrt{x^2+9}+\sqrt{(x-4)^2+2^2}$

Consideăm [AB] de lungime 4 (u); iar pe dreapta AB se iau perpendicularele AC şi BD de o parte şi de alta a dreptei AB, de lungime 3 (u) şi respectiv 2(u). **(1p)**

Fie M$\in$[AB] unde AM =x(u) si MB=4-x(u).

D



Δ ACM : m(A)=90^0 CM=$\sqrt{x^2+9}$

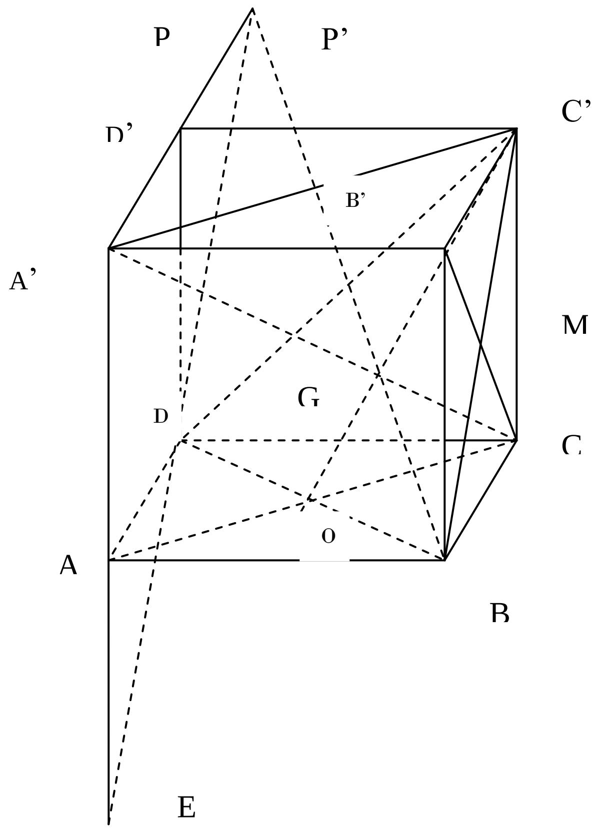
Δ BMD : m(B)=90^0 MD=$\sqrt{(4-x)^2+4}$

CM+MD=minima daca M$\in$(CD) **(1p)**

$\Rightarrow$ Δ CAM ~ Δ DBM (AC $\parallel$ BD) $\Rightarrow \dfrac{AC}{BD}=\dfrac{AM}{BM}$ $\quad \dfrac{3}{2}=\dfrac{X}{4-X}$ $\quad \Rightarrow X=\dfrac{12}{5}$ **(1p)**

E$\left(\dfrac{12}{5}\right)$**=**$\sqrt{\dfrac{144}{25}+9}+\sqrt{(4-\dfrac{12}{5})^2+4}=\sqrt{41}$ **(1p)**

II.



a) A'C'|| OC $\Rightarrow$ ΔGOC~ ΔGC'A' $\Rightarrow \dfrac{GO}{GC'} = \dfrac{OC}{A'C'} = \dfrac{1}{2}$ si cum (C'O) este mediana in Δ C'BD $\Rightarrow$ ca G este centrul de greutate al Δ C'BD **(2p)**

$\Rightarrow$ DG $\cap$ C'B ={M} , M mijlocul [BC'] $\Rightarrow$ M si mijlocul segmentului B'C. **(1p)**

b) BG $\subset$(BC,D'A') si fie BG $\cap$ A'D' ={P}

Δ GBC ~Δ GPA' $\Rightarrow \dfrac{BC}{PA'} = \dfrac{GC}{GA'} = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow P$ este simetricul lui A' fata de D' (1) **(2p)**

ED $\subset$ (AD,A'D') si fie ED $\cap$ A'D' ={P'}

AD|| A'P' si cum A este mijlocul [A'E] $\Rightarrow$[AD] este linie mijlocie in ΔEA'P' $\Rightarrow$ A'P'=2AD

$\Rightarrow$ P' este simetricul lui A' fata de D' (2)

Din (1) si (2) $\Rightarrow$ P=P' $\Rightarrow$ PG si ED sunt concurente deci coplanare. **(2p)**

III. Fie s=x+y+z. Conform inegalității mediilor avem:

$\sqrt{\frac{y+z}{x}} \leq \frac{\frac{y+z}{x}+1}{2} = \frac{x+y+z}{2x} = \frac{s}{2x}$ adică $\sqrt{\frac{x}{y+z}} \geq \frac{2x}{s}$ si analog obtinem:

$\sqrt{\frac{y}{z+x}} \geq \frac{2y}{s}$, $\sqrt{\frac{z}{x+y}} \geq \frac{2z}{s}$ de unde deducem ca:

$\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} \geq \frac{2(x+y+z)}{s} = \frac{2s}{s} = 2$ ceea ce demonstreaza inegalitatea din enunt.