LICEUL TEORETIC
„AL.MARGHILOMAN"

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ
EREMIA GEORGESCU-BUZĂU**

Ediția a II-a

17 decembrie 2011

**Filiala Buzău
a SSM din
România**

Clasa a XII-a M1

SUBIECTUL I

a) Să se determine funcția derivabilă $f : R \to R$ care satisface condițiile:

$$\begin{cases} (e^x + x^2 e^{-x}) f'(x) = (1-x)(1+f^2(x)),\ \forall\, x \in R \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

b) Dacă $y : R \to R$ este o primitivă a funcției f, cu y(0)=-1, să se arate că y'' + 2y' + y=0.

c) Pentru n≥3, să se calculeze determinantul de ordin n:

$$\begin{vmatrix} f(x) & f'(x) & \dots & f^{(n-1)}(x) \\ f'(x) & f''(x) & \dots & f^{(n)}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^{(n-1)}(x) & f^{(n)}(x) & \dots & f^{(2n-2)}(x) \end{vmatrix}$$

Rezolvare :

a) Avem $(1+x^2e^{-2x}) f'(x) = (1-x)e^{-x}(1+f^2(x))$

Deci $\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)} = \dfrac{(1-x)e^{-x}}{1+x^2e^{-2x}}$ .... 1 p

De unde $arctg\, f(x) = arctg\,(xe^{-x}) + C$ .... 1 p

Din f(0)=0 obținem C=0, deci $f(x) = xe^{-x}$ .... 1 p

b) Avem $y = -(x+1)e^{-x}$ .... 1 p

de unde $y + y' = -e^{-x}$, $y' + y'' = e^{-x}$ şi $y'' + 2y' + y = 0$ …………………….. 1 p

c) Determinantul este 0, deoarece linia 2 este semisuma liniilor 1 şi 3, conform cu b) ……………………………………………………. …. 2 p

SUBIECTUL II

Fie $(G,\cdot)$ grup cu 2011 elemente şi $x, y \in G$ astfel încât $yxy=x$. Să se demonstreze că $y=e$, unde e este elementul neutru al grupului.

Demonstrație:

Din $yxy=x \Rightarrow y=(yx)^{-1}x$ şi $y=x(xy)^{-1}$ ……………………………1 p

Egalând relațiile obținem $x^2y=yx^2$ ………………………………. 1 p

Prin inducție matematică se demonstrează că $x^{2n}y=yx^{2n}$, oricare ar fi $n\geq 1$ natural ……………………………………………………………………2 p

Dar ord G =2011 $\Rightarrow x^{2011}=e$ …………………………………….. 1 p

Aşadar $x^{2010}=x^{-1} \Rightarrow x^{2010}y= x^{-1}y$ şi $yx^{2010}=y x^{-1} \Rightarrow x^{-1}y= y x^{-1} \Rightarrow xy=yx$ …. 1p

Prin ipoteză $x=yxy \Rightarrow x=xy^2 \Rightarrow y^2=e \Rightarrow y^{2010}=e$

Dar $y^{2011}=e \Rightarrow y=e$ ……………………………………………… 1p

SUBIECTUL III

Să se calculeze $\int \frac{x^2+x+1}{(x+1)^3} \cdot e^x \cdot \cos x \cdot dx$, $\quad x\in (-1,\infty)$

Demonstrație :

$\frac{x^2+x+1}{(x+1)^3} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3}$ 1p

Notând cu I integrala cerută avem relația:

$I = I_1 - I_2 + I_3$ unde $I_1 = \int \frac{e^x \cdot \cos x}{x+1} \cdot dx$, $I_2 = \int \frac{e^x \cdot \cos x}{(x+1)^2} \cdot dx$,

$I_3 = \int \frac{e^x \cdot \cos x}{(x+1)^3} \cdot dx$.. 1p

Integrând prin părți obținem:

$I_1 = \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{2(x+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{e^x(\cos x + \sin x)}{(x+1)^2} \cdot dx$..............................2p

(Am ales $f(x) = \frac{1}{x+1}$ și $g'(x) = e^x \cdot \cos x$)

Analog $I_3 = -\frac{e^x \cdot \cos x}{2(x+1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{e^x(\cos x - \sin x)}{(x+1)^2} \cdot dx$ (Am ales $f(x) = e^x \cdot \cos x$ și $g'(x) = \frac{1}{(x+1)^3}$...2p

Prin înlocuire rezultă:

$I = \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{2(x+1)} - \frac{e^x \cdot \cos x}{2(x+1)^2} + C$.....................................1p

Notă:

Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Succes dragi copii!