



Clasa a XI-a M1

SUBIECTUL I

Să se calculeze $A^n, n \in \mathbb{N}^*, A \in M_3(\mathbb{R}^*)$ unde: $A = \begin{pmatrix} p & q & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$

Soluție:

Scriem matricea A ca sumă a matricelor P și Q unde $P = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$ $Q = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și

calculăm puterile lor. 1 p

Deoarece $P = p \cdot I_3 \Rightarrow P^n = p^n \cdot I_3, \forall n \in \mathbb{N}^*$ 1 p

$Q = q \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q^2 = q^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $Q^3 = q^3 \cdot O_3 \Rightarrow Q^n = O_n, \forall n \geq 3, n \in \mathbb{N}^*$... 1 p

Cum produsul matricelor P și Q este comutativ deoarece $P \cdot Q = p \cdot q \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și

$Q \cdot P = q \cdot p \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ 1 p

→ se poate aplica formula dezvoltării binomului lui Newton pentru $P + Q^n$:

$P + Q^n = P^n + C_n^1 P^{n-1} Q + C_n^2 P^{n-2} Q^2 + C_n^3 P^{n-3} Q^3 + \dots + Q^n$ 1 p

Deoarece pentru $n \geq 3: Q^n = O_3 \Rightarrow$ din dezvoltarea precedentă rămân doar primii trei termeni și avem:



**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ
EREMIA GEORGESCU-BUZĂU**

Ediția a II-a

17 decembrie 2011



**LICEUL TEORETIC
AL MARGHILOMAN**

**Filiala Buzău
a SSM din
România**

$$A^n = P + Q^n = p^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{n!}{1! \cdot n-1!} \cdot p^{n-1} q \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n!}{2! \cdot n-2!} \cdot p^{n-2} q^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

..... 1 p

$$A^n = p^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \cdot p^{n-1} q \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n \cdot n-1}{2} \cdot p^{n-2} q^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} p^n & n \cdot p^{n-1} q & \frac{n \cdot n-1}{2} \cdot p^{n-2} q^2 \\ 0 & p^n & n \cdot p^{n-1} q \\ 0 & 0 & p^n \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots 1 p$$

SUBIECTUL II

Fie șirul de numere pozitive, nenule $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, cu $x_{n+1}^2 = x_n^2 + a x_{n+1} x_n$, $n \in \mathbb{N}$, $a < 0$.

- a) Să se arate că șirul este convergent.
- b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} n x_n$

Soluție:

a) Relația dată se scrie: $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^2 = a \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) + 1$, 1 p

Notăm $y = \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ și ecuația se scrie $f(y) = y^2 - ay - 1 = 0$, $a < 0$;

Ecuația $f(0) = -1$; $f(1) = -a > 0$, deci ecuația dată admite o rădăcină în intervalul $(0,1)$ și o rădăcină negativă. Fie k din $(0,1)$ rădăcină a ecuației, atunci: 1 p

$k = \frac{x_{n+1}}{x_n}$, $x_{n+1} = k x_n$.

Așadar $x_n = k^{n-1} x_1$ 1 p

și deci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ 1 p



b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n}} \stackrel{\text{Stolz}}{=} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} = \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{kx_n x_n}{x_n - kx_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{1-k} x_n = 0 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

SUBIECTUL III

Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{(2n+1)!}{n!} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{4}{e}$

Soluție

Fie $a_n = \frac{(2n+1)!}{n^n n!} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$

Cum $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+3)(2n+2)}{(n+1)^2} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \dots\dots\dots 2 \text{ p}$

Avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4}{e}, \dots\dots\dots 2 \text{ p}$

deci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{(2n+1)!}{n!} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{4}{e} \dots\dots\dots 2 \text{ p}$