LICEUL TEORETIC
„AL.MARGHILOMAN”

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ
EREMIA GEORGESCU-BUZĂU

Ediția a II-a

17 decembrie 2011

Filiala Buzău
a SSM din
România

Clasa a XI-a M1

SUBIECTUL I

Să se calculeze $A^n, n \in N^*, A \in M_3(R^*)$ unde: $A = \begin{pmatrix} p & q & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$

Soluție:

Scriem matricea A ca sumă a matricelor P şi Q unde $P = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$ $Q = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi calculăm puterile lor. ………………………………………………………………. 1 p

Deoarece $P = p \cdot I_3 \Rightarrow P^n = p^n \cdot I_3, \forall n \in \mathbb{N}^*$ …………………………………….. 1 p

$Q = q \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q^2 = q^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $Q^3 = q^3 \cdot O_3 \Rightarrow Q^n = O_n, \ \forall \ n \geq 3, n \in \mathbb{N}^*$ … 1 p

Cum produsul matricelor P şi Q este comutativ deoarece $P \cdot Q = p \cdot q \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi

$Q \cdot P = q \cdot p \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ ………………………………………………………….. 1 p

➔se poate aplica formula dezvoltării binomului lui Newton pentru $(P+Q)^n$:

$(P+Q)^n = P^n + C_n^1 P^{n-1} Q + C_n^2 P^{n-2} Q^2 + C_n^3 P^{n-3} Q^3 + ... + Q^n$ ………………………… 1 p

Deoarece pentru $n \geq 3 : Q^n = O_3 \Rightarrow$ din dezvoltarea precedentă rămân doar primii trei termeni şi avem:

$$A^n = (P+Q)^n = p^n\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\frac{n!}{1!\,(n-1)!}\cdot p^{n-1}q\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+\frac{n!}{2!\,(n-2)!}\cdot p^{n-2}q^2\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

.... 1 p

$$A^n = p^n\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+n\cdot p^{n-1}q\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+\frac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot p^{n-2}q^2\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}p^n & n\cdot p^{n-1}q & \frac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot p^{n-2}q^2\\ 0 & p^n & n\cdot p^{n-1}q\\ 0 & 0 & p^n\end{pmatrix}$$

…………….. 1 p

SUBIECTUL II

Fie şirul de numere pozitive, nenule $\{x_n\}_{n\in N}$, cu $x_{n+1}^2 = x_n^2 + a x_{n+1}x_n$, $n\in N$, $a<0$.

a) Să se arate că şirul este convergent.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$

Soluție:

a) Relația dată se scrie: $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^2 = a\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) + 1$, ………………….. 1 p

Notăm $y=\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ şi ecuația se scrie $f(y)= y^2-ay-1 =0$, $a<0$;

Ecuația $f(0)=-1$; $f(1)=-a >0$, deci ecuația dată admite o rădăcină în intervalul (0,1) şi o rădăcină negativă. Fie k din (0,1) rădăcină a ecuației, atunci: .... 1 p

$k=\frac{x_{n+1}}{x_n}$, $x_{n+1}=k\,x_n$.

Aşadar $x_n= k^{n-1} x_1$ .... 1 p

şi deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ ……………………………………. 1 p b)

$$\lim_{n\to\infty} nx_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n}} \overset{Stolz}{=} \text{...} 1\ p$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} = \text{.................................} 1\ p$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{kx_n x_n}{x_n - kx_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{k}{1-k} x_n = 0 \text{ ....} 1\ p$$

SUBIECTUL III

Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{(2n+1)!}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{4}{e}$

Soluție

Fie $a_n = \frac{(2n+1)!}{n^n n!}$ .... 1 p

Cum $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+3)(2n+2)}{(n+1)^2} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$ .... 2 p

Avem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4}{e}$, ... 2 p

deci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{(2n+1)!}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{4}{e}$ .... 2 p