



Clasa a X-a M1

SUBIECTUL I

Fie $a > 1$, $b > 0$, $b \neq 1$ și $k \in \mathbf{N}^*$. Rezolvați ecuația:

$$a^{\sqrt{1-\log_b(x)} + \log_b(x)} + \left(\log_b \frac{b}{x}\right)^{2k} = a + 1$$

Barem

Condiție de existență: $x > 0$

Observație: $1 - \log_b(x) + \log_b(x) = -\log_b(x) \geq 0$ (1p)

Ecuația devine: $a^{|1-\log_b(x)| + (-\log_b(x))^{2k}} = a + 1$ (1p)

Folosind substituția $y = 1 - \log_b(x)$ se obține ecuația $a^{|y|} + y^{2k} = a + 1$ (1p)

Caz I. $y \geq 0$

Ecuația $a^y + y^{2k} = a + 1$ admite soluția $y_1 = 1$ deci $x_1 = 1$ (1p)

Soluția este unică (dem. cu inegalități sau cu funcții str. cresc.) (1p)

Caz II. $y < 0$

Ecuația $a^{-y} + y^{2k} = a + 1$ admite soluția $y_2 = -1$ deci $x_2 = b^2$ (1p)

Soluția este unică (dem. cu inegalități sau cu funcții str. descresc.) (1p)

SUBIECTUL II

Fie $n \in \mathbf{N}^*$ și $z, z_0 \in \mathbf{C}$ astfel încât $|z_0| \leq 1$ și $z^n \pm z^{n-1} \pm \dots \pm z + 2z_0 = 0$, pentru o anumită alegere a semnelor + sau -. Să se arate că $|z| \leq 2$.

Barem

Scriind egalitatea dată sub forma $-z^n = \pm z^{n-1} \pm \dots \pm z + 2z_0$ și aplicând inegalitatea modulelor, obținem $|z|^n \leq |z|^{n-1} + \dots + |z| + 2|z_0|$(2p)

Fie $|z_0| = a \leq 1$ și $|z| = r$. Să presupunem (prin absurd) $r > 2$.

$$\text{Avem atunci } r^n \leq r^{n-1} + \dots + r + 2a \Leftrightarrow r^n \leq \frac{r^n - 1}{r - 1} + 2a - 1 \Leftrightarrow \frac{r^{n+1} - 2r^n + 1}{r - 1} \leq 2a - 1 \dots\dots\dots(2p)$$



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ
EREMIA GEORGESCU-BUZĂU

Ediția a II-a

17 decembrie 2011



Filiala Buzău
a SSM din
România

LICEUL TEORETIC
AL MARGHILOMAN

Scăzând o unitate din ambii membri, obținem $\frac{(-2)^n - 1}{r-1} \leq 2(-1)^n \leq 0$, ceea ce contrazice
presupunerea făcută, deci $r \leq 2$(3p)

SUBIECTUL III

Să se arate că dacă a, b, c sunt numere reale strict pozitive cu $a + b + c = abc$, atunci

$$(+a^2)(+b^2)(+c^2) \geq 64$$

Barem

Relația $a + b + c = abc$ se scrie $\frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab} = 1$ (2p)

Avem $1 + a^2 = a^2 \left(1 + \frac{1}{a^2} \right) = a^2 \left(\frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2} \right) = a^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right) = \frac{(+b)(+c)}{bc} \geq \frac{4a}{\sqrt{bc}}$
..... (4p)

Deci $(+a^2)(+b^2)(+c^2) \geq \frac{4a}{\sqrt{bc}} \cdot \frac{4b}{\sqrt{ac}} \cdot \frac{4c}{\sqrt{ba}} = 64$ (1p)