LICEUL TEORETIC „AL.MARGHILOMAN”

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ
EREMIA GEORGESCU-BUZĂU

Ediția a II-a

17 decembrie 2011

Filiala Buzău a SSM din România

Clasa a X-a M1

SUBIECTUL I

Fie $a>1$, $b>0$, $b\neq 1$ şi $k\in \mathbf{N}^*$. Rezolvați ecuația:

$$a^{\sqrt{1-\log_b(x^2)+(\log_b x)^2}}+\left(\log_b \frac{b}{x}\right)^{2k}=a+1$$

Barem

Condiție de existență: $x>0$

Observație: $1-\log_b(x^2)+(\log_b x)^2=(1-\log_b x)^2\geq 0$ .... (1p)

Ecuația devine: $a^{|1-\log_b x|}+(1-\log_b x)^{2k}=a+1$ .... (1p)

Folosind substituția $y=1-\log_b x$ se obține ecuația $a^{|y|}+y^{2k}=a+1$ .... (1p)

Caz I. $y\geq 0$

Ecuația $a^y+y^{2k}=a+1$ admite soluția $y_1=1$ deci $x_1=1$ .... (1p)

Soluția este unică (dem. cu inegalități sau cu funcții str. cresc.) .... (1p)

Caz II. $y<0$

Ecuația $a^{-y}+y^{2k}=a+1$ admite soluția $y_2=-1$ deci $x_2=b^2$ .... (1p)

Soluția este unică (dem. cu inegalități sau cu funcții str. descresc.) .... (1p)

SUBIECTUL II

Fie $n\in\mathbf{N}^*$ şi $z, z_0\in\mathbf{C}$ astfel încât $|z_0|\leq 1$ şi $z^n\pm z^{n-1}\pm\ldots\pm z+2z_0=0$, pentru o anumită alegere a semnelor + sau $-$. Să se arate că $|z|\leq 2$.

Barem

Scriind egalitatea dată sub forma $-z^n=\pm z^{n-1}\pm\ldots\pm z+2z_0$ şi aplicând inegalitatea modulelor, obținem $|z|^n\leq |z|^{n-1}+\ldots+|z|+2|z_0|$. ....(2p)

Fie $|z_0|=a\leq 1$ şi $|z|=r$. Să presupunem (prin absurd) $r>2$.

Avem atunci $r^n\leq r^{n-1}+\ldots+r+2a \iff r^n\leq \dfrac{r^n-1}{r-1}+2a-1 \iff \dfrac{r^{n+1}-2r^n+1}{r-1}\leq 2a-1$..........(2p)

Scăzând o unitate din ambii membri, obținem $\frac{(r-2)(r^n-1)}{r-1} \le 2(a-1) \le 0$, ceea ce contrazice presupunerea făcută, deci $r \le 2$. ....(3p)

SUBIECTUL III

Să se arate că dacă a, b, c sunt numere reale strict pozitive cu $a+b+c=abc$, atunci $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) \ge 64$

Barem

Relația $a+b+c=abc$ se scrie $\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}=1$ .... (2p)

Avem $1+a^2=a^2\left(1+\frac{1}{a^2}\right)=a^2\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a^2}\right)=a^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)=\frac{(a+b)(a+c)}{bc}\ge\frac{4a}{\sqrt{bc}}$

.... (4p)

Deci $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) \ge \frac{4a}{\sqrt{bc}}\cdot\frac{4b}{\sqrt{ac}}\cdot\frac{4c}{\sqrt{ba}}=64$ .... (1p)