Olimpiada de Matematică – etapa locală- Galați
11 februarie 2012

Clasa a IX-a

Problema 1.

Fie mulțimile
$M=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\cdot x\cdot y-3\cdot x+5\cdot y=7\}$ şi $N=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/3\cdot x\cdot y-5\cdot x+7\cdot y=11\}$.
Mulțimile M şi N sunt egale?(justificare).

Problema 2.

Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1=0$ şi $a_{n+1}=a_n+\sqrt{4\cdot a_n+1}+1$, $n\in\mathbb{N}, n\geq 1$. Să se demonstreze că $\sqrt{4\cdot a_1+1}+\sqrt{4\cdot a_2+1}+\sqrt{4\cdot a_3+1}+...+\sqrt{4\cdot a_n+1}=n^2$, $n\in\mathbb{N},\ n\geq 1$.

Problema 3.

Să se determine numărul natural $n\geq 2$ care verifică relația

$$\left[\sqrt{9\cdot n^2+1}\right]+\left[\sqrt{9\cdot n^2+2}\right]+...+\left[\sqrt{9\cdot n^2+24\cdot n}\right]=349 .$$

(unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a).

.

Problema 4.

Fie punctele M, N, P situate respectiv pe laturile AB, BC, CA ale triunghiului ABC, astfel încât $AM=BN=CP$. Notăm cu T centrul de greutate al triunghiului MNP. Ştiind că $AB\cdot\overrightarrow{AT}+BC\cdot\overrightarrow{BT}+CA\cdot\overrightarrow{CT}=\vec{0}$, să se demonstreze că triunghiul ABC este echilateral.

Notă Toate problemele sunt obligatorii
Timp efectiv de lucru 3 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7