Olimpiada de Matematică – etapa locală- Galați
11 februarie 2012

Clasa a VIII-a

Problema 1.

Să se determine restul împărțirii numărului $a = 11^{100} + 11^{101} + 11^{102} + ... + 11^{199}$ la 133.

Problema 2.

Să se demonstreze că**:**

a) dacă $a, b > 0$, atunci $a^3 + b^3 \geq a^2 \cdot b + a \cdot b^2$.

b) dacă $a, b, c > 0$ cu $a \cdot b \cdot c = 1$, atunci $2 \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + a + b + c$.

Problema 3.

a) Să se demonstreze că $\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{x \cdot y}$, oricare ar fi numerele reale $x, y > 0$.

b) Paralelogramul $ABCD$ şi trapezul $CDEF\ (CD \parallel EF)$ sunt situate în plane diferite şi $[\mathrm{EF}] \equiv [\mathrm{AD}]$. Ştiind că $MN \parallel EF$, unde $\{N\} = AF \cap BE$ şi $M \in (AE)$, să se demonstreze că $2 \cdot MN < \sqrt{AB \cdot BC}$.

Problema 4.

Într-un tetraedru regulat $DABC$ cu muchia de lungime a, punctele M şi N sunt respectiv mijloacele muchiilor $[BD]$ şi $[CD]$, iar punctul O este centrul triunghiului ABC. Să se calculeze distanța dintre :

a) dreptele MN şi DO;

b) dreptele AD şi BC;

c) dreptele MN şi AB.

Notă Toate problemele sunt obligatorii
Timp efectiv de lucru 3 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7