Olimpiada de Matematică – etapa locală- Galați
11 februarie 2012
Clasa a VII-a

Problema 1.

a) Să se calculeze media aritmetică şi media geometrică a numerelor m şi n ştiind că $m=\frac{1006}{2011}\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+...+\frac{1}{1+2+3+...+2011}\right)$, iar n este cardinalul mulțimii A, unde $A=\left\{\overline{ab}\,/\,\sqrt{\overline{ab}+6\cdot(a+b)+\overline{ba}}\in\mathbb{N}\right\}$.

b) Să se demonstreze că $\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{\sqrt{12}}{7}+\frac{\sqrt{20}}{9}+\frac{\sqrt{30}}{11}+\frac{\sqrt{42}}{13}+\frac{\sqrt{56}}{15}+\frac{\sqrt{72}}{17}+\frac{\sqrt{90}}{19}<4.$

Problema 2.

a) Fie numerele naturale nenule $a,\ b$ cu $a<b$. Să se demonstreze că $b-a\geq(a,b)$, unde (a,b) reprezintă c.m.m.d.c. pentru numerele a şi b.

b) Să se demonstreze că oricare ar fi numerele naturale nenule $a_1,a_2,a_3,...a_{2011}$ cu proprietatea $a_1<a_2<a_3<...<a_{2011}$ are loc inegalitatea $\frac{1}{[a_1,a_2]}+\frac{1}{[a_2,a_3]}+...+\frac{1}{[a_{2010},a_{2011}]}\leq\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{2011}}$, unde $[c,d]$ reprezintă c.m.m.m.c. al numerelor c şi d.

Problema 3.

Fie triunghiul ABC în care bisectoarea interioară a unghiului $\measuredangle ABC$ intersectează mediatoarea laturii $[BC]$ în punctul P şi formează cu aceasta un unghi de 60°. Ştiind că $m(\measuredangle PCA)=45^\circ$ şi Q este punctul în care CP intersectează latura AB, să se demonstreze că $PM=\frac{1}{3}\cdot AQ$, unde punctul $M\in[BC]$, $[BM]\equiv[MC]$.

Problema 4.

Fie paralelogramul $ABCD$ şi punctele $P\in(AB)$, $\{M\}=PC\cap BD$, $\{N\}=PD\cap AC$, $\{O\}=AC\cap BD$. Să se demonstreze că $\frac{OM}{MD}+\frac{ON}{NC}=\frac{1}{2}$.

Notă Toate problemele sunt obligatorii
Timp efectiv de lucru 3 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7