Olimpiada de Matematică – etapa locală- Galați
11 februarie 2012

Clasa a X-a

Problema 1.

Fie funcția $f : D \to (0,\infty), f(x) = 2^{\arccos(\ln x)} + 0,5^{-2\cdot arcctg(x)}$.

a) Să se determine domeniul maxim D de definiție al funcției f.

b) Să se rezolve ecuația $f(x) = \sqrt{2^{\pi+2}}$.

Problema2.

Să se demonstreze că pentru orice număr natural $n, n \geq 4$, există $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ numere naturale pare distincte astfel ca $1 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}$.

Problema 3.

Într-un triunghi ABC au loc simultan relațiile:

1) $a + b + c = \frac{4}{r \cdot R}$;

2) $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 6$;

Să se demonstreze că $R = 2 \cdot r$.

(a,b,c sunt lungimile laturilor triunghiului, r raza cercului înscris în triunghi, R raza cercului circumscris triunghiului).

Problema 4.

Fie triunghiul ABC şi O centrul cercului circumscris. Ştiind că raza cercului circumscris este egală cu 6 şi că $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = -54$, să se demonstreze că triunghiul ABC este echilateral.

Notă Toate problemele sunt obligatorii
Timp efectiv de lucru 3 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7