Olimpiada de Matematică – etapa locală- Galați
11 februarie 2012

Clasa a XII-a

Problema 1. a) Să se demonstreze că $arctg\, x + arctg\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2},\ (\forall)x > 0$.

b) Să se calculeze $\int_{\frac{1}{4}}^{4} \frac{(x+1)\cdot arctg\, x}{x\cdot\sqrt{x^2+1}}dx$.

Problema 2.

Fie funcția $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ care admite primitive şi $x_0\in(a,b)$. Se consideră funcția $F:(a,b)\to\mathbb{R}$ care satisface condițiile:

1). F este derivabilă pe $(a,b)-\{x_0\}$.

2). $F'(x)=f(x),\ \forall x\in(a,b)-\{x_0\}$.

3). F este continuă în x_0.

a) Să se demonstreze că F este o primitivă a funcției f.

b) Pentru orice funcție $g:(a,b)\to\mathbb{R}$, derivabilă cu g' continuă , să se demonstreze că funcția $f\cdot g$ admite primitive, unde $f\cdot g:(a,b)\to\mathbb{R},\ (f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x),(\forall)x\in(a,b)$.

Problema 3.

a) Fie $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ o funcție continuă şi crescătoare. Să se demonstreze că $\int_a^b x\cdot f(x)\,dx \le b^2\cdot f(b)-a^2\cdot f(a)$, oricare ar fi $b\ge a\ge 0$.

b) Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu $f'(x)<0$ şi $\int_a^b f(x)dx=0$. Să se demonstreze că $f(a)\cdot f(b)<0$.

Problema 4.

a) Fie $(G,\cdot)$ un grup cu $3n+1$ elemente, $n\in\mathbb{N}^*$. Să se demonstreze că pentru orice $a\in G$, există un unic $x\in G$, astfel încât $x^3=a^2$.

b) Fie n un număr natural, $n\ge 2$ şi $(G,\cdot)$ un grup cu n^2-n-1 elemente. Ştiind că funcția $f:G\to G, f(x)=x^n$, este un endomorfism al grupului, să se demonstreze că $(G,\cdot)$ este grup abelian.

Notă Toate problemele sunt obligatorii
Timp efectiv de lucru 3 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7