Olimpiada de Matematică – etapa locală- Galați
11 februarie 2012

Clasa a XI-a

Problema 1.

Pentru orice număr natural nenul $n,$ se notează cu x_n numărul real pentru care $n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+n^{\alpha}\cdot x_n,$ unde α este un parametru real. Să se determine natura şirului (x_n) în funcție de valorile lui α.

Problema 2.

Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n^2\cdot\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}\right)\right]$, unde $a>0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n^3\cdot\left(\sqrt[n]{a}-2\cdot\sqrt[n+1]{a}+\sqrt[n+2]{a}\right)\right]$, unde $a>0$.

Problema 3.

Fie A,B,C măsurile unghiurilor unui triunghi ABC şi $\Delta=\begin{vmatrix}\sin A & \sin B & \sin C\\ \sin 2A & \sin 2B & \sin 2C\\ \sin 3A & \sin 3B & \sin 3C\end{vmatrix}$.

Să se demonstreze că $\Delta=0 \Leftrightarrow \triangle ABC$ este isoscel.

Problema 4.

a) Să se demonstreze că $(\forall)A,B,C\in M_2(\mathbb{R})$ cu $\det(A\cdot B-B\cdot A)\geq 0$, au loc relațiile:

i). $\det(A+B)+\det(A-B)=2\cdot\det A+2\cdot\det B$;

ii). $(\det C)^2-2\sqrt{\det(A\cdot B-B\cdot A)}\cdot\det C+\det(A^2+B^2)\geq 0,$

(s-a notat cu $\det X=$ determinantul matricei X).

b) Să se determine 2 matrice $A,B\in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det(A^2+B^2)<0$.

Notă Toate problemele sunt obligatorii
Timp efectiv de lucru 3 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7