Colegiul Național “Mircea cel Bătrân” Constanța

Concursul Național de Matematică “N. N. Mihăileanu”

Ediția a XIII-a, 5 aprilie 2012

Clasa a IX-a

Subiectul 1

Determinaţi funcţia strict crescătoare $f : \mathbf{N^*} \to \mathbf{N^*}$, care pentru fiecare $n \in \mathbf{N^*}$ verifică egalitatea

$\left[\sqrt{n^2 + f(1)}\right] + \left[\sqrt{n^2 + f(2)}\right] + \ldots + \left[\sqrt{n^2 + f(2n)}\right] = 2n^2$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

Florian Gache, Constanța

Subiectul 2

Pentru fiecare $n \in \mathbf{N}^*$ definim șirul $(a_n)_n$ astfel:

$$a_n \text{ este cel mai mare element al mulţimii } \left\{k \in \mathbf{N} \,\middle|\, 2^k \text{ divide pe } n\right\}.$$

a) Să se arate că $a_{2n} - a_n = 1$ pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

b) Să se arate că $\sum\limits_{k=1}^{2^n} \frac{k}{2^{a_k}} = \frac{4^n + 2}{3}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Cătălin Zîrnă, Constanța

Subiectul 3

Fie AA_1, BB_1, CC_1 diametre în cercul circumscris triunghiului ABC și H_1, H_2, H_3 ortocentrele triunghiurilor A_1BC, AB_1C și respectiv ABC_1. Demonstraţi că dacă centrul cercului circumscris triunghiului ABC este centrul de greutate al triunghiului $H_1H_2H_3$, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Gabriela Constantinescu, Constanța

Subiectul 4

Suma a 10 numere naturale este 2012. Determinaţi valoarea maximă pe care o poate lua produsul lor.

Laurențiu Homentcovschi, Constanța

Notă. Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă are 7 puncte.