

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 11 FEBRUARIE 2012****Clasa a V-a**

Problema 1. Se dau mulțimile: $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 2011, 2012\}$, $B = \{x \in A \mid x \div 2\}$, $C = \{x \in A \mid x \div 5\}$.
Aflați (Dacă M este o mulțime card M este numărul elementelor mulțimii M):

- card C ;
- card $(B \cap C)$;
- card $(C - B)$.

Adriana Oлару, Călărași

Problema 2. Fie șirul de numere naturale: 1; 3; 7; 13; 21; ...

- Scrieți următorii 3 termeni ai șirului;
- Arătați că 2012 nu este termen al șirului.

Sorin Furtună, Călărași

Problema 3. În orașul Copenhaga, se organizează un puternic turneu amical de fotbal la care participă următoarele echipe: F. C. Copenhaga (gazda și campioana Danemarcei), Oțelul Galați (campioana României), precum și echipele Steaua și Dinamo (din București). În acest turneu se joacă pe sistemul "fiecare cu fiecare", câte un singur meci, iar la sfârșit se alcătuieste un clasament final, în ordinea descrescătoare a numărului de puncte obținut de fiecare echipa astfel: Nume echipă; număr puncte (număr goluri înscrise-număr goluri primite); (golaveraj) ($golaveraj = număr\ goluri\ înscrise - număr\ goluri\ primite$). Exemplu: "nume echipa"; 4 p; (7-5) (+2). Se acordă trei puncte pentru victorie, un punct la meci egal și zero puncte la înfrângere. Dacă două echipe sunt la egalitate de puncte, este superioară echipa cu golaveraj mai bun. Dacă au și același golaveraj, este superioară echipa cu număr superior de goluri înscrise.

- Aflați numărul minim și numărul maxim de puncte, care poate fi obținut de cele patru echipe împreună?
- Alcătuieți clasamentul final dacă presupunem că în turneu s-au înregistrat rezultatele: F.C. Copenhaga-Oțelul 3-0; Steaua - F.C. Copenhaga 2-1; Dinamo - F.C. Copenhaga 3-3; Dinamo—Oțelul 2-4; Steaua - Dinamo 1-1; Oțelul - Steaua 2-2.

Florin Ștefan Marcu, Călărași

Problema 4. a) Andrei scrie pe tablă toate numerele de la 1 la 2012. Mihai a șters de pe tablă toate numerele care au ultima cifră 0 sau 5 și i-a întreabă pe Andrei:

- Crezi că poți afla ultima cifră a produsului tuturor numerelor rămase pe tablă?
- Cu siguranță, a răspuns Andrei și i-a explicat lui Mihai cum a procedat.

Explicați cum a procedat Andrei și care a fost cifra găsită?

Relu Ciupea, Oltenița

b) Mai multe persoane născute în secolul trecut (*între 1900 și 1999*) au scris într-un tabel în coloana I numărul format de ultimele două cifre ale anului în care s-au născut și în coloana II vârsta pe care o vor aniversa în anul 2012. Dacă suma numerelor din coloana I este a , suma numerelor din coloana II este b și $a+b=2016$ puteți stabili câte persoane au completat tabelul? Justificați răspunsul.

Adriana Oлару, Călărași

SUCCES!

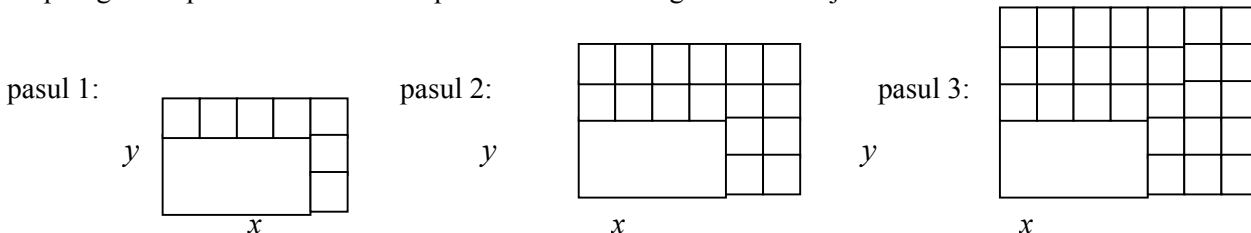
Notă: Durata concursului este de trei ore .

Baremul de notare este: **Problema 1** a) 2 puncte; b) 2 puncte; c) 3 puncte; **Problema 2.** a) 3 puncte; b) 4 puncte; **Problema 3.** a) 3 puncte; b) 4 puncte; **Problema 4.** a) 3 puncte; b) 4 puncte.

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 11 FEBRUARIE 2012**

Clasa a VI-a

Problema 1. Un joc pe calculator funcționează după următorul algoritm: pe ecranul monitorului este afișat un dreptunghi de lungime x și lățime y și, la fiecare pas al algoritmului, se adaugă pe două laturi alăturate ale dreptunghiului pătrate de latură 1 după cum se vede în figurile de mai jos:



Știind că la pasul 29 se obține un dreptunghi de arie 1023 să se afle x și y . Justificați răspunsul. (*Un dreptunghi are aria 1023 dacă poate fi acoperit cu o rețea de 1023 de pătrate cu latura 1 și interioarele disjuncte.*)

Relu Ciupea, Oltenița

Problema 2. a) Aflați cel mai mic număr pătrat perfect care este divizibil cu 96 și este mai mare decât 2012.

b) Numerele naturale se grupează în modul următor: $\underbrace{1}_1$; $\underbrace{2, 4, 6}_2$; $\underbrace{3, 5, 7, \dots, 19}_3$; $\underbrace{8, 10, 12, \dots, 60}_4$; ...

(Grupele numerotate cu numere impare conțin numere impare, grupele numerotate cu numere pare conțin numere pare, grupa 1 conține un număr, grupa 2 conține 3 numere, grupa 3 conține 9 numere, grupa 4 conține 27 numere, etc.)

Care este numărul grupei care conține numărul 2012?

Adriana Constantin și Aurelia Cațaros, Călărași

c) Aflați numerele prime a, b, c , dacă $b > a > c$ și este adevărată egalitatea: $169a + 105b + 3c^2 = 2012$.

Eugen Predoiu, Călărași

Problema 3. a) Se consideră unghiurile $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$, astfel încât $\angle AOB$, $\angle BOC$ sunt adiacente, iar $\angle BOC$ și $\angle COD$ sunt de asemenea adiacente. Fie $[OE]$ și $[OF]$ bisectoarele unghiurilor $\angle AOB$, respectiv $\angle COD$. Dacă $m(\angle AOC) + m(\angle BOD) = 120^\circ$, calculați $m(\angle EOF)$.

Luminița Bucureșteanu, Călărași

b) Fie M punctul de intersecție a mediatoarelor segmentelor $[AB]$ și $[AC]$. Să se demonstreze că $m(\angle BAC) = 90^\circ \Leftrightarrow B, M, C$ sunt coliniare. (*Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este 180° .*)

Florica și Lucian Ioniță, Călărași

Problema 4. a) Dacă $\{a, b, c, d\} = \{5, 15, 25, 35\}$ determinați cea mai mare valoare a numărului $ab + ad + bc + cd$.

Eugenia Vlad, Călărași

b) Să se arate că oricum am plasa 15 puncte în regiunile determinate în plan de trei drepte distincte cel puțin o regiune conține mai mult de două puncte. (*O mulțime de puncte din plan se numește regiune dacă oricare ar fi două puncte din mulțime, segmentul deschis determinat de ele, este inclus în mulțime.*)

Camelia Iordache, Călărași

SUCCES!

Notă: Durata concursului este de trei ore.

Baremul de notare este: **Problema 1.** 7 puncte; **Problema 2.** a) 2 puncte; b) 2 puncte; c) 3 puncte;

Problema 3. a) 3 puncte; b) 4 puncte; **Problema 4.** a) 3 puncte; b) 4 puncte.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 12 FEBRUARIE 2011

Clasa a VII-a

Problema 1. a) Dacă $a, b, c \in \mathbf{N}$ și numerele $a, \sqrt{b}, c\sqrt{d}$ sunt direct proporționale cu numerele $2\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$, arătați că $a^2 = b + c^2d$.

Sorin Furtună, Călărași

b) Arătați că oricare ar fi $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$, este adevărată inegalitatea

$$\frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right) > \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right).$$

Cristina Bornea, Călărași

Problema 2. Fie paralelogramul $ABCD$ și E mijlocul lui $[AB]$. Dacă $DE \cap AC = \{M\}$, $CE \cap DB = \{N\}$ și $AC \cap BD = \{O\}$ demonstrați că:

a) $\frac{BN}{MC} + \frac{AM}{DN} \geq 1$;

b) $A(MONE)$ este $\frac{1}{12}$ din $A(ABCD)$. ($A(XYZT)$ este aria patrulaterului $XYZT$)

Gheorghe Fianu, Ștefan cel Mare

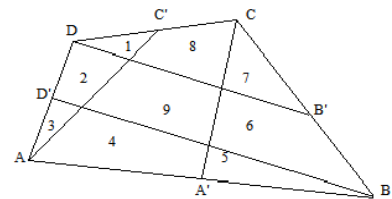
Problema 3. a) Triunghiul isoscel ascuțitunghic ABC ($AB=AC$) și pătratul $ACDE$ nu au puncte interioare comune. Dacă bisectoarea unghiului $\angle BAC$ intersectează dreapta CD în punctul M , $BC \cap DE = \{N\}$ și $AB \cap DE = \{P\}$ atunci arătați că ΔBNP este isoscel.

Sica și Sorin Furtună, Călărași

b) Dacă $ABCD$ este paralelogram și $AD \perp AC$, punctul N este proiecția punctului C pe dreapta BD , punctul P simetricul punctului B față de dreapta AC atunci demonstrați că $AN \perp NP$.

Eugen Predoiu și Marin Neață, Călărași

Problema 4. Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ și punctele A', B', C', D' respectiv mijloacele laturilor AB, BC, CD, DA . Dreptele $AC', A'C, BD', B'D$ împart suprafața patrulaterului în 9 regiuni numerotate de la 1 la 9 ca în figura alăturată. Să se demonstreze că $A_1 + A_3 + A_5 + A_7 = A_9$ (A_i este aria regiunii i).



Relu Ciupea, Oltenița

SUCCES!

Notă: Durata concursului este de trei ore.

Baremul de notare este: **Problema 1** a) 3 puncte; b) 4 puncte; **Problema 2.** 1 a) 3 puncte; b) 4 puncte; **Problema 3.** a) 3 puncte; b) 4 puncte; **Problema 4.** 7 puncte.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 12 FEBRUARIE 2011

Clasa a VIII-a

Problema 1. a) Determinați penultima cifră a pătratului unui număr natural care are ultima cifră 5. Justificați răspunsul.

b) Să se arate că oricare ar fi numerele întregi a, b și c numărul: $abc(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)$ este multiplu de 5.

Georgeta Cioboată, Călărași

Problema 2. Dreapta d este perpendiculară pe planul dreptunghiului $ABCD$. Dacă $D, P \in d$, $AB = a\sqrt{2}$, $AD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $PD = a$, ($a > 0$), $DM \perp PC$, $M \in (PC)$ și $DN \perp PA$, $N \in (PA)$ calculați :

- Lungimea segmentului (MN) ;
- Dacă α este măsura unghiului format de MN cu planul dreptunghiului determinați $\sin \alpha$.
- Dacă β este măsura unghiului format de planele (PAC) și (ABC) determinați $\operatorname{tg} \beta$.

Sorin Furtună, Călărași și Stelică Pană, Chirnogi

Problema 3. a) Descompuneți în trei factori expresia: $a^3 + b^3 + a^2 - b^2 - ab^2 - a^2b$.

b) Fie mulțimile $A = \{k^3 \mid k \in \mathbf{Z}\}$ și $B = \{5^k - 1 \mid k \in \mathbf{Z}\}$. Determinați mulțimea $A \cap B$.

Viorica Stoianovici, Călărași

Problema 4. Dacă A, B, C, D sunt patru puncte necoplanare și C_1 este mijlocul segmentului $[AB]$, O este mijlocul segmentului $[CC_1]$, M este mijlocul segmentului $[DO]$, $(ABM) \cap [CD] = \{P\}$, $(ACM) \cap [BD] = \{Q\}$, $(BCM) \cap [AD] = \{R\}$, atunci demonstrați că:

- $\frac{PD}{DC} = \frac{1}{3}$;
- $QR \parallel (ABC)$.

Gheorghe Fianu, Ștefan cel Mare

SUCCES!

Notă: Durata concursului este de trei ore .

Baremul de notare este: **Problema 1.** a) 3 puncte; b) 4 puncte; **Problema 2.** a) 2 puncte; b) 2 puncte; c) 3 puncte; **Problema 3.** a) 3 puncte; b) 4 puncte; **Problema 4.** a) 3 puncte; b) 4 puncte.